L'infini est-il paradoxal en mathématiques?

JEAN-PAUL DELAHAYE

Pour résoudre le paradoxe du tout et des parties et affronter l'hypothèse du continu, notre idée de l'infini actuel doit évoluer ; aujourd'hui encore, nous découvrons de nouveaux infinis.

1. LE PARADOXE DE L'HÔTEL DE HILBERT

L'histoire suivante illustre pourquoi des ensembles infinis actuels ont longtemps parus absurdes. Un hôtel infini dont les chambres sont numérotées par les entiers 0, 1, 2, 3, ... est complet pour la nuit (un client occupe chaque chambre). Arrive un client : «Pas de problème, lui répond le responsable de l'accueil. Installez-vous dans la chambre 0. Je demande au client de la chambre 0 de passer dans la chambre 1, à celui de la chambre 1 de passer dans la chambre 2, etc.» L'accueil dispose bien sûr d'un téléphone spécial qui permet de téléphoner simultanément à toutes les chambres en demandant au client de la chambre n de passer en $n + 1$. Le nouveau client a pu être reçu. Dix minutes plus tard arrive un car (infini, bien sûr) de nouveaux clients qui demandent à passer la nuit dans l'hôtel. «Pas de problème», répond le responsable de l'accueil au chauffeur du car, et il utilise son téléphone pour demander au client de la chambre n de passer dans la chambre $2n$. Il indique alors au chauffeur du car que le voyageur numéro i de son autocar peut disposer de la chambre $2i + 1$ (qui est effectivement libre, puisque toutes les chambres de numéro impair ont été libérées). Une demi-heure plus tard arrive un groupe plus important constitué d'une infinité de cars, chacun ayant à leur bord une infinité de passagers. «Pas de problème, je vous arrange ça», répond le responsable de l'accueil. Il téléphone au client de la chambre i de passer dans la chambre $2i + 1$ (ce qui libère toutes les chambres ayant un numéro pair) et donne la consigne suivante au responsable du groupe d'autocars : le passager numéro i du bus j doit occuper la chambre $2^{i+1}(2j + 1)$. Tout se passe bien, et jamais deux voyageurs différents ne se sont vus attribuer la même chambre.

L'infini, c'est long, surtout vers la fin. (Alphonse Allais)

Bernard Bolzano

L'infini mathématique peut-il être maîtrisé? Autrement dit, peut-on faire une théorie de l'infini qui évite tout paradoxe et toute incohérence? Pour répondre à ces questions, nous distinguerons paradoxes et situations logiquement peu satisfaisantes.

Un paradoxe au sein d'une théorie est la possibilité de démontrer une chose et son contraire. Dans cette situation, tout en n'utilisant que des raisonnements fondés sur les axiomes de la théorie, nous pouvons en tirer une affirmation *A* et l'affirmation contraire *Non A*. En mathématiques, les paradoxes (on les dénomme aussi contradictions, inconsistances, antinomies) sont inacceptables, et les logiciens font tout pour les éviter.

Aujourd'hui, les mathématiciens connaissent toutes sortes de moyens pour contourner les paradoxes au sein des théories mathématiques de l'infini. La question subsiste : ces moyens atteignent-ils leurs fins?

Une situation logiquement insatisfaisante apparaît lorsqu'une théorie nous permet d'énoncer des propriétés étonnantes, parfois opposées à notre attente, sans toutefois qu'une véritable contradiction apparaisse. Nous pouvons alors continuer à développer la théorie en espérant que la difficulté sera résolue plus tard. Parfois nous finissons par accepter la situation jugée gênante, et ce qui était perçu comme douteux devient alors banal, comme si une métamorphose de nos conceptions profondes s'était produite.

Quelle est aujourd'hui la situation entre paradoxes infinis, situations insatisfaisantes tolérées et digérées ?

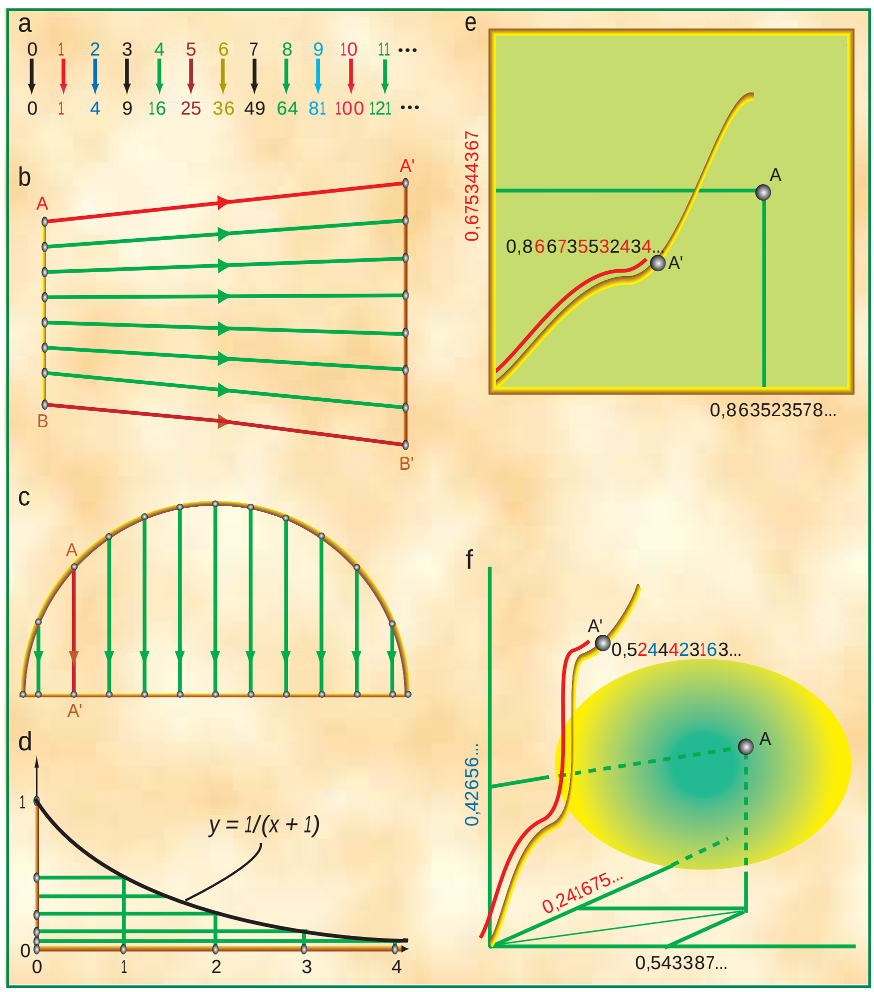
Pour le savoir, nous allons passer en revue quelques paradoxes de l'infini mathématique, paradoxes qui décidèrent de son histoire. À chaque fois, nous évoquerons les solutions mathématiques avancées et nous nous interrogerons pour savoir si ces solutions sont satisfaisantes en tout point ou si, au contraire, elles laissent des zones d'ombre qui marquent la limite de cette prétendue maîtrise de l'infini par le formalisme des mathématiques modernes.

L'infini n'a pas été accepté facilement, et on a longtemps espéré pouvoir s'en passer. Aristote refusait l'infini actuel (ou infini actuel), c'est-à-dire pris d'un seul tenant. Il déniait toute existence physique à l'infini, mais lui reconnaissait une certaine existence mathématique, car il lui semblait nécessaire d'envisager des grandeurs de plus en plus grandes : chaque entier est suivi d'un autre ; aucun point n'est le dernier point d'une droite. Les mathématiciens ont tenté de se contenter de cet infini potentiel ou en tout cas de s'y ramener, en évitant autant que possible l'infini actuel.

Carl Friedrich Gauss

L'impensable infini actuel

Euclide, par exemple, n'énonce pas qu'il existe une infinité de nombres premiers, mais que «les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité de nombres premiers proposée», ce qu'il démontre en établissant que, si



2. LES PARADOXES DE LA RÉFLEXIVITÉ : si les ensembles infinis existent en acte et non pas potentiellement, comme les ensembles que l'on complète petit à petit, alors l'ensemble des carrés est aussi grand que l'ensemble des nombres entiers : on peut associer chaque élément de l'un à un élément de l'autre *(a)*. Similairement *(b)*, le segment AB est aussi «grand» que le segment A'B', et le demi-périmètre d'un cercle est «égal» à son diamètre *(c)*. On peut aussi mettre en correspondance *(d)* les points réels d'un segment et les points d'une demi-droite infinie par la relation $y = 1/(x+1)$. Similairement, Cantor (il fut très surpris de cette possibilité) a mis en relation l'ensemble des points d'une surface plane avec les points d'une courbe quelconque. Pour cela, on associe aux deux coordonnées d'un point une valeur obtenue en intercalant les décimales des deux nombres représentant les coordonnées, et l'on associe à cette valeur un point de la courbe dont la distance à l'origine (prise le long de la courbe) est égale à la valeur obtenue *(e)*. De la même façon, on associe les points d'un volume aux points d'une courbe *(f)*.

Richard Dedekind

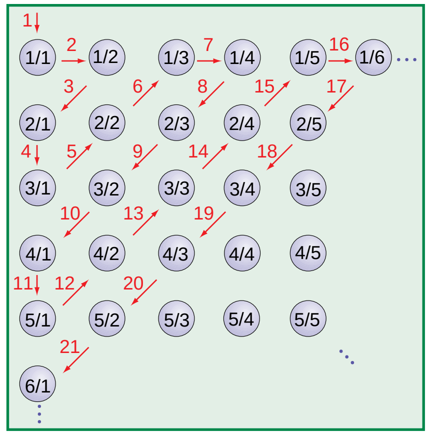
des nombres premiers sont donnés par avance p_1, p_2,... p_k, on peut en construire un (le plus petit diviseur premier de $p_1 p_2 ... p_k+1$) qui sera différent de tous ceux qui étaient donnés.

La raison profonde de cette méfiance vis-à-vis de l'infini actuel est le paradoxe de la réflexivité : si un ensemble est infini, il est possible de le mettre en correspondance un à un – on dit aussi bijective, ou biunivoque – avec une de ses parties propres (c'est-à-dire différente de lui-même). La relation qui associe n^2 au nombre n, par exemple, établit une correspondance bijective entre les nombres entiers 0, 1, 2, 3, ... et les nombres pairs 0, 1, 4, 9, ... lesquels sont pourtant moins nombreux.

Le même problème surgit à propos du segment des nombres réels compris entre 0 et 1 (noté aujourd'hui [0,1]) et celui des nombres réels compris entre 0 et 2 (la correspondance bijective est celle qui, à x, associe $2x$) ; généralisant, on met sans aucune peine en correspondance bijective deux segments de droite AB et $A'B'$ quelconques. Plus gênante encore la correspondance qui à x associe $1/(x+1)$, car elle met en correspondance bijective l'intervalle les nombres réels compris entre 0 et 1, noté $]0, +1[$, et l'ensemble des nombres réels positifs, noté $]0, +\infty[$.

En quoi le paradoxe de la réflexivité est-il un paradoxe, nous demandons-nous aujourd'hui? C'est un paradoxe, car le principe du tout et de la partie qui indique que «le tout est plus gros que la partie» y est mis en défaut. On n'imagine pas de renoncer à une vérité aussi claire. On craint que notre raison ne puisse résister à la remise en cause d'un tel principe immédiat. Reconsidérer ce principe du tout et de la partie apparaîtrait d'une audace insensée, et c'est pourquoi on a bien souvent préféré conclure que seul un être infini lui-même, Dieu par exemple, peut penser l'infini. L'Église s'opposait d'ailleurs à toute tentative des hommes de penser l'infini actuel. Saint Thomas d'Aquin considérait que quiconque pensait concevoir l'infini actuel entrait en concurrence avec la nature unique et absolument infinie de Dieu.

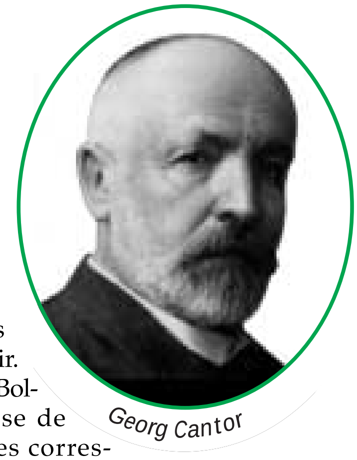
Gottfried Leibniz



3. L'ENSEMBLE INFINI des nombres rationnels (c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui sont le quotient de deux nombres entiers) semble supérieur à l'ensemble des nombres entiers. Cantor démontra que l'on peut apparier les nombres rationnels dans un réseau carré et associer un nombre entier à chaque nombre rationnel en traçant le chemin coloré représenté sur la figure. L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable !

Il faudra deux mille ans pour franchir cet obstacle. Le principe du tout et de la partie qui, à vrai dire, n'est guère utile en mathématiques, devait être reconsidéré : ce principe éminemment paradoxal empêchait tout progrès dans la compréhension de l'infini actuel.

Cette audace sera le fait du philosophe mathématicien tchèque Bernhard Bolzano (1781-1848), dont l'ouvrage *Les paradoxes de l'infini*, publié après sa mort en 1851, envisage des correspondances bijectives entre une totalité et l'une de ses parties propres, sans s'en émouvoir. Au contraire Bolzano propose de voir dans ces correspondances la caractéristique des totalités infinies, ce qui revient à abandonner, pour les totalités infinies, le principe du tout et de la partie. Plus tard, le mathématicien allemand Richard Dedekind (1831-1916) définira qu'un ensemble est infini s'il peut être mis en bijection avec une de ses parties propres : aujourd'hui, on adopte souvent cette définition en théorie des ensembles pour définir un ensemble infini.

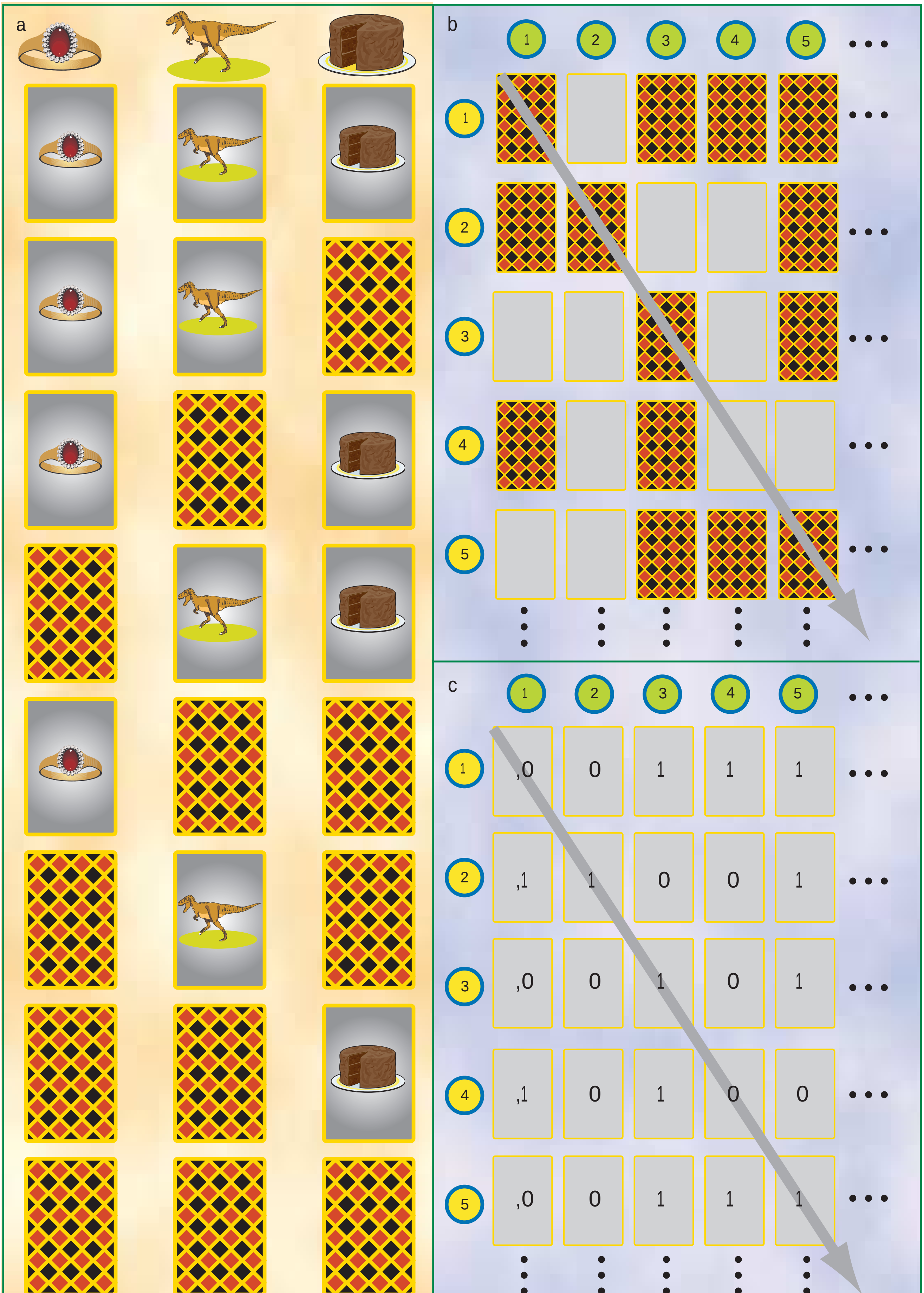


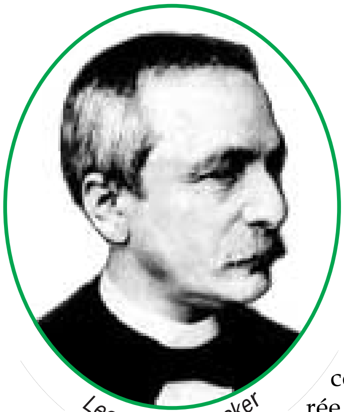
Georg Cantor

Avant Bolzano, G. Leibniz avait défendu l'idée de l'infini actuel : «Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son Auteur.» (Leibniz, *Opera omnia studio Ludov.* Dutens, tome II, partie X.) Bolzano place cette citation en exergue de son ouvrage révolutionnaire.

Cependant l'infini actuel que défend Leibniz est différent de celui des totalités infinies considérées actuel dans le problème du paradoxe de la réflexivité. Leibniz défend plutôt un infini philosophique, celui du monde physique pris comme un tout. L'infiniment petit (qui est confronté

4. CANTOR a prouvé qu'il existe des infinis plus grands que l'infini dénombrable (ensemble dont on peut numéroter tous les éléments). Examinons d'abord un ensemble fini comportant trois éléments : nous dénombrons huit sous-ensembles (2^3) distincts *(a)*. Pour un ensemble de *N* éléments, il existe 2^N sous ensembles différents (chaque élément peut être, ou non, partie de l'ensemble). Construisons les sous-ensembles d'un ensemble infini dénombrable d'éléments *(b)*. Nous démontrons par l'absurde qu'il est impossible de numéroter chaque élément de cet ensemble, donc que l'ensemble infini des sous-ensembles d'un ensemble dénombrable n'est pas dénombrable. Supposons que cela soit possible. Chaque sous-ensemble est représenté par un ensemble de cartes, chaque sous-ensemble s'étendant à l'infini vers la droite. Nous numérotons chaque sous-ensemble de haut en bas. Les numéroterons-nous ainsi tous? Non. Examinons le sous-ensemble constitué par les cartes de la diagonale et supposons que nous avons retourné toutes les cartes : il n'est pas identique au premier sous-ensemble, car la première carte est différente ; il n'est pas identique au second, car la seconde carte, retournée, est différente, et ainsi de suite. Le *n*-ième sous-ensemble diffère du nouveau sous-ensemble, car la carte numéro *n* est retournée. Nous avons ainsi confectionné un sous-ensemble qui ne fait pas partie de la liste. Donc l'ensemble des sous-ensembles n'est pas numérotable... Cette preuve diagonale de Cantor sert à prouver que l'ensemble des nombres réels (les nombres rationnels et les nombres irrationnels) n'est pas dénombrable. Examinons *(c)* les nombres réels du segment de longueur unité : la distance de chaque point à l'origine est écrite sous forme binaire 0,011010010111... Le point dont la distance à l'origine est mesurée par les chiffres inversés de la diagonale ne figure pas dans l'énumération, et il est donc impossible de numéroter tous les nombres réels du segment unité... L'ensemble des nombres réels à la puissance $2^{\aleph_0}$ est un infini plus grand que l'infini dénombrable.


a
b
1 2 3 4 5 ...
1 2 3 4 5
c
1 2 3 4 5 ...
1 ,0 0 1 1 1 ...
2 ,1 1 0 0 1 ...
3 ,0 0 1 0 1 ...
4 ,1 0 1 0 0 ...
5 ,0 0 1 1 1 ...



Leopold Kronecker

à d'autres paradoxes qu'on utilise parfois pour attaquer les nouvelles méthodes de calcul que Leibniz défend) ne saura vraiment trouver une place confortable et assurée en mathématiques qu'en se débarrassant de son objectualité, c'est-à-dire quand on ne parlera plus des infiniment petits comme d'objets mathématiques, mais comme de limites.

Les mathématiciens du XX^e siècle sauront redonner aux infiniment petits un statut d'objet authentique. La méthode utilisée au XIX^e siècle pour rendre rigoureux le calcul infinitésimal est un renoncement à l'infini actuel, auquel on substitue un infini potentiel, celui de quantités qui s'approchent de plus en plus de leur limite.

Le prince des mathématiciens, Gauss (1777-1855), exprimant le sentiment partagé par la communauté mathématique de son époque, écrivait par exemple : «Je conteste qu'on utilise un objet infini comme un tout complet ; en mathématiques, cette opération est interdite ; l'infini n'est qu'une façon de parler.»

On peut donc affirmer que, malgré quelques tentatives diverses pour fonder une science mathématique de l'infini, c'est Bolzano et nul autre qui, en affrontant le paradoxe de la réflexivité, a le premier ouvert la voie à ce qui aujourd'hui est notre conception de l'infini mathématique pris comme un tout.

La solution actuelle du paradoxe de la réflexivité

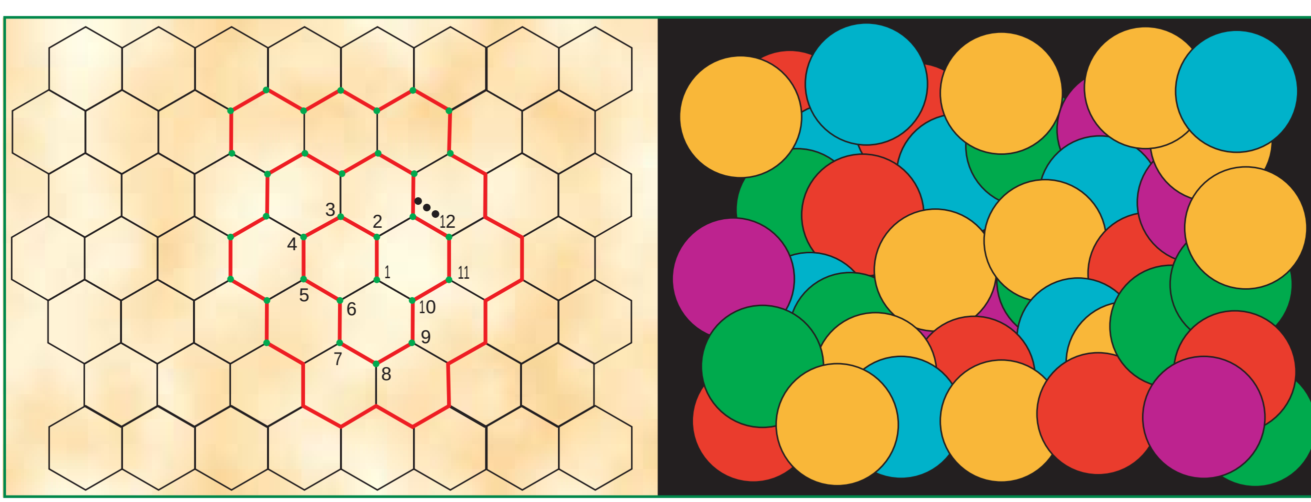
La solution du paradoxe de la réflexivité proposée par Bolzano et rendue parfaitement claire par le développement ultérieur de la théorie des ensembles en termes modernes s'énonce ainsi : la relation «est contenu dans» entre ensembles ne doit pas être confondue avec la relation «avoir une taille plus petite que» : les nombres carrés sont contenus dans les nombres entiers, mais comme totalité ils ont même taille. Il est bien vrai que, si l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B, alors la taille de A est inférieure ou égale à celle de B, mais elle peut être égale.

Au lieu de «taille», on emploie souvent le terme technique de «cardinal», mais c'est sans importance, l'idée unique de la solution du paradoxe est d'admettre qu'un ensemble A strictement contenu dans un ensemble B a parfois la même taille. Il faut accepter ce qui paraissait paradoxal et décréter que ça ne l'est plus par une opération de dédoublement de concept : «être contenu dans» n'est pas «avoir une taille plus petite que».

Ce pas franchi, n'allons-nous pas tomber sur des contradictions qui conduiraient à une mathématique inconsistante, et donc intenable ? Le jeu en vaut certainement la chandelle, mais il n'est pas facile à mener et ce sont d'autres que Bolzano qui le joueront, car, il faut bien le dire, Bolzano, comme essoufflé par l'audace de sa proposition initiale, ne mène pas le développement mathématique qu'elle appelle pourtant.

Kurt Gödel

L'exploration mathématique de l'algèbre des bijections sera longue et tortueuse, et Bolzano inaugure une période d'instabilité grave et de controverses parfois acerbes. Le travail principal sera fait par le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918), qui découvrira de nombreuses propriétés des tailles d'ensembles infinis qui lui sembleront souvent à la limite du paradoxe. Cantor distinguera les tailles des ensembles. Si le contraire avait été vrai – c'est-à-dire si chaque ensemble infini avait pu être mis en bijection avec chaque autre –, la théorie de la taille des ensembles infinis aurait singulièrement manqué d'intérêt ! Cantor s'aperçoit, en 1874, que l'ensemble des nombres réels ne peut pas être mis en bijection avec l'ensemble des nombres entiers : il est de taille strictement plus grande. Le raisonnement diagonal que Cantor découvre en simplifiant son raisonnement de 1874 sera le prototype même du raisonnement permettant de démontrer des résultats d'impossibilité en mathématiques. Dans ce théorème, on suppose que ce qu'on veut établir est faux (ici, qu'il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers et l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels) puis on joue sur la diagonale du tableau qu'elle définit (le i-ème chiffre du nombre réel f(i)), et l'on déduit une contradiction.



5. La différence entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$ est importante en géométrie, quand apparaissent des ensembles infinis. Ainsi le nombre de sommets d'un pavage hexagonal du plan est $\aleph_0$, car on peut tracer une spirale *(en rouge)*, où l'on numérote tous les sommets. En revanche, le nombre de cercles que l'on peut disposer sur une feuille de taille finie est un infini $2^{\aleph_0}$, car le centre de chaque cercle est un point du plan.

Mieux (ou pire!), Cantor montre, toujours par un raisonnement diagonal, qu'il existe une infinité de tailles possibles différentes pour les ensembles infinis. Plus précisément, un ensemble E ne peut jamais être mis en bijection avec l'ensemble de ses parties, noté P(E). L'ensemble P(ℕ) des parties de ℕ (qui est composé de l'ensemble des nombres pairs, de l'ensemble des nombres premiers, etc.) ne peut pas être mis en bijection avec ℕ. De même, l'ensemble P(P(ℕ)) (ensemble des parties de l'ensemble P(ℕ)) ne peut pas être mis en bijection avec P(ℕ) ; etc.

Ces résultats constituent une première avancée dans la compréhension de l'infini actuel et la preuve que ce qu'on découvre est digne d'intérêt : les résultats construisent une hiérarchie des totalités infinies où l'esprit trouve ses repères. Ces premiers résultats ne sont pas sans soulever réprobations et critiques. Le célèbre mathématicien Kronecker est particulièrement sévère et il bloquera un manuscrit de Cantor en en retardant la parution dans le *Journal de Crelle*, l'un des plus prestigieux journaux de mathématiques, auquel Cantor refusera par la suite de proposer ses travaux.

Cantor découvre un résultat étonnant

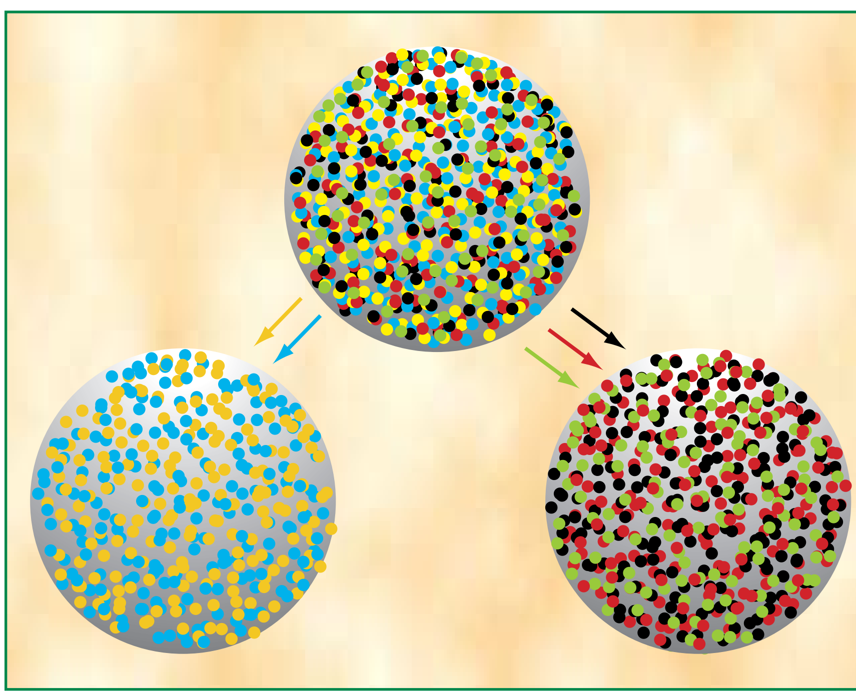
L'article dont Kronecker a retardé la publication contient un résultat de Cantor tout à fait étonnant qui, bien que ne constituant pas un paradoxe, fut à n'en pas douter considéré sur le moment comme créant une situation logiquement peu satisfaisante. Cantor, toujours occupé à classer les infinis, a en effet découvert avec stupeur que l'ensemble des points d'une surface (un carré, par exemple) possède la même taille que l'ensemble des points d'un segment de droite. Du point de vue de leur taille d'ensemble infini, une droite et un plan (ou même un espace de dimension *n*) sont identiques. Il écrira à Dedekind à ce propos : «Je le vois, mais je ne le crois pas.»

Cantor adopte l'attitude téméraire qui consiste à accepter cette nouvelle vérité sans la décréter paradoxale, malgré la gêne qu'elle engendre. Comme aucune contradiction véritable ne découle des raisonnements et des calculs que Cantor élabore avec soin, il faut avoir l'audace d'accepter ce que nos facultés de raisonnement produisent et, aussi déconcertante que soit

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LA NOTATION DES ALEPH

Cantor proposa de noter les infinis de la façon suivante :
- L'infini des entiers est noté $\aleph_0$ (ce qui se lit aleph zéro)
- L'infini suivant est noté $\aleph_1$, etc.

Par ailleurs, l'infini des nombres réels (le continu) est noté $2^{\aleph_0}$.
La justification de cette notation est que, d'une part, on démontre que l'ensemble des nombres réels a la même taille que l'ensemble des parties de $\aleph_0$, et que, d'autre part, dans le cas fini, on montre que le nombre de parties d'un ensemble à *n* éléments est 2^n (par analogie, on note donc 2^a la taille de l'ensemble des parties d'un ensemble de taille *a*).
L'échelle des infinis donnée par le théorème fondamental de Cantor est notée: $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, etc.
La question de savoir s'il n'y a rien entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$ s'écrit : $\aleph_1$ est-il égal à $2^{\aleph_0}$?
L'affirmation $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ est appelée hypothèse du continu.
L'affirmation que, pour tout i : $\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i}$ est appelée hypothèse généralisée du continu.
Ces affirmations ont été démontrées indépendantes des axiomes classiquement acceptés pour la théorie des ensembles : jamais il ne sera possible à partir d'eux de savoir ce qu'il en est de la vérité de ces affirmations. Cela ne signifie cependant pas que tout espoir soit perdu de savoir si ces affirmations sont vraies ou fausses : il est possible que certains axiomes concernant les ensembles aient été oubliés et que, lorsque nous les découvrirons et les ajouterons aux axiomes connus, l'hypothèse du continu devienne démontrable.



6. LE PARADOXE DE BANACH-TARSKI : on établit qu'une sphère peut être décomposée en un nombre fini de morceaux, qui, une fois déplacés (sans déformation), se recomposent en deux sphères identiques à la sphère de départ. Plus généralement, une sphère peut être transformée en un cube sans aucune condition de volume sur la sphère initiale et sur le cube final. Et plus généralement encore, si deux parties A et B de l'espace sont de taille bornée et contiennent chacune au moins une sphère de rayon positif, alors on peut décomposer A en un nombre fini de morceaux qui, après déplacement, reconstitueront B. Ces découpages paradoxaux ont été découverts en 1924 par les mathématiciens polonais Stephan Banach et Alfred Tarski, qui travaillaient sur la théorie de la mesure (théorie abstraite des aires et des volumes). Bien que ces découpages choquent profondément le sens commun, qui s'attend à ce qu'en déplaçant des morceaux d'un objet on n'en modifie pas le volume, il n'y a pas «paradoxe» au sens strict : aucune contradiction n'est introduite dans la théorie des ensembles. Ces découpages montrent seulement que le monde du continu mathématique et les conséquences de l'axiome du choix ne correspondent pas à nos attentes intuitives.

PARADOXE DE RUSSELL

Soit l'ensemble des x qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes : $E = \{x ; x \notin x\}$.
Si $E \in E$, alors, par définition, $E \notin E$. Si $E \notin E$, alors, par définition, $E \in E$: c'est contradictoire!
Le paradoxe de l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes (paradoxe de Russell) est aujourd'hui correctement résolu en théorie des ensembles de la façon suivante.
On définit les méthodes qui permettent de créer de nouveaux ensembles à partir d'ensembles existant déjà (réunion, ensemble des parties, etc.), et il ne suffit pas de considérer une propriété (par exemple, $x \notin x$) pour pouvoir affirmer qu'il existe un ensemble regroupant tous les objets qui satisfont cette propriété. La notation $E = \{x ; x \notin x\}$ ne désigne pas nécessairement un objet légitime de la théorie des ensembles sur lequel on peut raisonner comme le fait le paradoxe ; si on veut l'utiliser, il faut établir que c'est un ensemble par utilisation des règles que fixe la théorie. Pour $E = \{x ; x \notin x\}$, on n'y arrive pas. Dans la théorie Zermelo-Fraenkel (désignée par ZF), la présentation correcte du raisonnement ci-dessus est donc :
Supposons qu'il existe un ensemble défini par : $E = \{x ; x \notin x\}$.
Si $E\in E$, alors, par définition, $E \notin E$. Si $E \notin E$, alors, par définition, $E \in E$, c'est contradictoire, donc il n'existe pas d'ensemble défini par l'égalité : $E = \{x ; x \notin x\}$.
Pour des raisons analogues, il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles, ni d'ensemble de tous les cardinaux, ou d'ensemble de tous les ordinaux. Cette solution classique aux paradoxes de la théorie des ensembles, découverts au début du XX^e siècle, réussit bien. Aucun nouveau paradoxe n'a été découvert dans la théorie ZF jusqu'à présent.

cette nouvelle réalité de l'infini actuel, il faut en poursuivre l'exploration.

À vrai dire, au tournant du XX^e siècle, certaines contradictions (ce qu'on appellera les antinomies) sembleront rendre la construction cantorienne intenable. Toutefois, en quelques années, ces difficultés seront circonscrites (plusieurs méthodes seront même proposées) et ce qui apparut à certains comme la faillite de la théorie mathématique de l'infini actuel sera en définitive l'occasion pour cette théorie de se forger une armure qu'aujourd'hui rien n'est venu sérieusement érafler.

L'hypothèse du continu

Revenons à Cantor qui, en théoricien consciencieux, développe une arithmétique de l'infini, c'est-à-dire une extension, aux nombres qui lui servent à mesurer l'infini, des règles de calcul qu'on applique aux nombres entiers, servant à mesurer le fini. À cette occasion, il est contraint de distinguer deux types de nombres infinis, les cardinaux et les ordinaux. Les cardinaux sont les tailles des ensembles quand on les considère de manière brute, sans tenir compte d'un possible ordre entre leurs éléments. Cantor introduit en 1893 la notation $\aleph_0$ pour le cardinal de l'ensemble des nombres entiers, $2^{\aleph_0}$ pour le cardinal du continu (l'ensemble des nombres réels), qui est le même que celui de $P(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. Il utilise $2^{2^{\aleph_0}}$ pour le cardinal de $P(P(\mathbb{N}))$, etc.

L'autre type de nombres infinis de Cantor, les ordinaux, sert à mesurer la taille des ensembles lorsque leurs éléments sont ordonnés selon un bon ordre (un ordre tel que toute partie de l'ensemble possède un plus petit élément). Au-delà des ordinaux finis, qu'on assimile aux nombres entiers, il y a ω, le premier ordinal transfini, puis $\omega+1$, $\omega+2$, etc., qu'on obtient en ajoutant des unités une à une à ω. Plus loin encore, on trouve 2ω, $2\omega+1$,... puis ω^2, ω^ω, etc.

Cantor découvre alors un problème qui finalement se révélera d'une difficulté qu'aujourd'hui encore nous n'avons pas totalement maîtrisée : l'hypothèse du continu.

Le cardinal de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, ce qu'on appelle le continu et qui est mesuré par $2^{\aleph_0}$, est strictement plus grand que le cardinal des entiers (appelé infini dénombrable et mesuré, nous l'avons dit, par $\aleph_0$). Mais y a-t-il un autre cardinal entre les deux ? L'hypothèse du continu est l'affirmation qu'entre ces deux tailles d'ensembles infinis, $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$, il n'y en a pas d'autres. Comme Cantor désigne par $\aleph_1$ le plus petit des cardinaux plus grands que $\aleph_0$, l'hypothèse du continu est simplement l'affirmation $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. (L'hypothèse généralisée du continu est l'affirmation que $2^{\aleph_s} = \aleph_{s+1}$ pour tout *s*.)

Deux situations sont envisageables : soit *(a)* il n'y a pas d'autres tailles infinies entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, ce qui est équivalent à dire que «tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ ou avec $\mathbb{R}$» (c'est là un énoncé simple et, en apparence, très concret) ; soit *(b)* il y en a d'autres et alors il faudrait savoir combien et comment on les obtient. Nul ne peut prétendre disposer d'une idée claire des nombres réels s'il n'a une réponse précise au problème de l'hypothèse du continu. Cantor s'épuisera à le résoudre et n'y réussira pas, bien qu'il ait parfois pensé, à tort, avoir résolu la question.

L'indécidabilité ne résout rien

Plus tard, la théorie des ensembles formalisée, deux résultats importants furent démontrés concernant l'hypothèse du continu. En 1938, le mathématicien autrichien Kurt Gödel prouva que, si la théorie habituelle des ensembles est consistante (ne conduit pas à une contradiction) alors la même théorie complétée par l'axiome qui affirme que l'hypothèse du continu est vraie ne conduit pas plus à une contradiction. Admettre l'hypothèse du continu n'est donc pas susceptible de faire s'effondrer la théorie usuelle des ensembles. En 1963, Paul Cohen ira plus loin : si la théorie des ensembles est consistante, alors la même théorie complétée en ajoutant l'affirmation que l'hypothèse du continu est fausse est, elle aussi, sans contradiction.

Ces deux résultats regroupés permettent de dire que celui qui admet la théorie usuelle des ensembles peut, sans risque supplémentaire de contradiction, prendre l'hypothèse du continu ou prendre sa négation. La théorie des ensembles laisse le choix aux mathématiciens de considérer l'hypothèse du continu comme vraie ou comme fausse.

Cette indécidabilité de l'hypothèse du continu n'est pas un paradoxe : la théorie ne se contredit pas, au contraire elle ne dit rien. Toutefois cette sous-détermination est logiquement très insatisfaisante et profondément troublante.

En effet, considérons le monde des nombres entiers : il n'est pas arbitraire, ce n'est pas nous qui décidons si un nombre est pair ou impair, premier ou composé, etc. Pourquoi donc le monde des nombres réels serait-il arbitraire, et nous permettrait de décider en fonction de nos goûts qu'il existe de partie infinie de $\mathbb{R}$ impossible à mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, ou qu'au contraire il n'en existe pas?

Comme le pensait Cantor lui-même, ainsi que Gödel, l'hypothèse du continu doit être vraie ou fausse, et la théorie des ensembles doit nous permettre de le savoir, à moins qu'elle ne soit qu'une illusion, ce qui signifierait que la compréhension qu'elle nous donne de l'infini actuel est factice. La situation créée par les résultats de Gödel et de Cohen sur l'hypothèse du continu est logiquement insatisfaisante, mais c'est toute la signification de la théorie de l'infini actuel proposée par Cantor qui est en cause, et, finalement, c'est l'idée même d'une théorie de l'infini actuel qui se joue.

PARADOXE DE L'AUTORÉFÉRENCE ET DE L'INFINI

Chacun connaît le paradoxe du menteur. Un personnage dit «je mens». S'il dit vrai, alors il ment, donc il ne dit pas vrai : c'est absurde. S'il ment, alors ce qu'il dit est vrai, et donc il ne ment pas : c'est absurde. On résout ce paradoxe en disant qu'il faut s'interdire les phrases autoréférentes. Les choses ne sont peut-être pas si simples, car on s'est aperçu récemment que l'introduction de l'infini permet d'éviter l'autoréférence tout en maintenant une situation paradoxale.

Soit une infinité de personnes placées en rang : s(0), s(1), ..., s(n), ...

Chacune dit : «Au moins une personne derrière moi ment.»

Qui dit vrai ? Qui ment ?

D'après le sens des phrases prononcées :

• derrière toute personne qui dit vrai, il y a au moins une personne qui ment ;

• si une personne ment, alors toutes les personnes derrière elle disent vrai.

Si on désigne par M les personnes qui mentent et par H celles qui sont honnêtes et ne mentent pas, les deux règles précédentes se traduisent :

• derrière tout H, il y a au moins un M ;

• derrière un M, il n'y a que des H.

Il est impossible de concevoir une suite de M et de H qui vérifie ces deux règles (car tout M doit être suivi uniquement de H, ce qui ne se peut pas, puisque tout H doit être suivi d'au moins un M). Comme dans le cas du menteur, mais cette fois à cause de l'infinité des personnes, la situation est paradoxale. Ces paradoxes, dits sémantiques, sont encore examinés par les logiciens, et aucune solution totalement satisfaisante ne semble avoir été trouvée.

Voies pour aller plus loin

L'indécidabilité de l'hypothèse du continu ne règle donc pas la question de l'infini, mais au contraire l'exacerbe : si vraiment la théorie des ensembles fournit une compréhension de l'infini actuel et n'est pas qu'un jeu gratuit entre symboles mathématiques, sans contrepartie dans le monde réel, il doit être possible d'avancer encore.

Une première voie consiste à remettre en cause la théorie usuelle des ensembles. Cette théorie, notée ZF (en l'honneur des deux mathématiciens E. Zermelo et A. Fraenkel qui la définirent au début du XX^{e} siècle), peut être jugée insatisfaisante pour diverses raisons. En particulier, parce qu'elle engendre des situations contraires à l'intuition concernant l'existence d'objets mathématiques qu'on ne peut pas construire *(voir la figure 7)*. Diverses éventualités, théorie des types, théorie constructiviste des ensembles, théorie des ensembles avec ensemble universel, etc., ont été proposées sans toutefois retenir vraiment l'attention des mathématiciens, qui restent attachés à la simplicité de Zermelo-Fraenkel et ne semblent pas trouver très grave la situation créée par l'hypothèse du continu. Il est vrai que ces théories alternatives obligent à réévaluer tout le travail mathématique déjà fait, alors qu'aucune véritable contradiction n'est apparue. Seule une insatisfaction philosophique pousse certains à vouloir abandonner Zermelo-Fraenkel.

La seconde voie consiste à admette que Zermelo-Fraenkel est satisfaisante, c'est-à-dire qu'elle n'énonce que des choses acceptables pour les ensembles, mais qu'elle est incomplète. Certains axiomes manqueraient, et le travail du logicien et du mathématicien serait de les rechercher pour les ajouter. Ces axiomes découverts (ou au moins certains d'entre eux), l'hypothèse du continu ou sa négation deviendrait prouvable.

La seconde voie n'est pas du tout absurde et, en insistant sur l'incomplétude actuelle de la théorie des ensembles, on ne fait que prendre au sérieux les théorèmes généraux d'incomplétude démontrés par Kurt Gödel en 1931, dont l'indécidabilité de l'hypothèse du continu ne serait qu'une manifestation en théorie des ensembles. Cette seconde voie conduit au programme de recherche de trouver de nouveaux axiomes à ajouter à la théorie des ensembles, programme que Kurt Gödel lui-même a défendu.

Les grands cardinaux

Les travaux faits en logique mathématique sur ce que l'on dénomme les grands cardinaux constituent le domaine de recherche d'où pourrait provenir la solution de l'énigme de l'hypothèse du continu (une partie infinie de $\mathbb{R}$ est-elle toujours en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$?), tout en étant le domaine où les mathématiciens rencontrent de nouveaux infinis actuels dont la taille vertigineuse aurait fait tourner la tête à Cantor lui-même.

Les axiomes de grands cardinaux sont des affirmations portant sur des ensembles monstrueusement grands. Délicats à définir, ils procèdent de principes analogues à celui qui consiste à affirmer que non seulement $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$, $P(P(\mathbb{N}))$, ... sont des infinis actuels légitimes, mais qu'il y en a de plus grands encore, dont certains qui contiennent à la fois $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$, $P(P(\mathbb{N}))$, ...

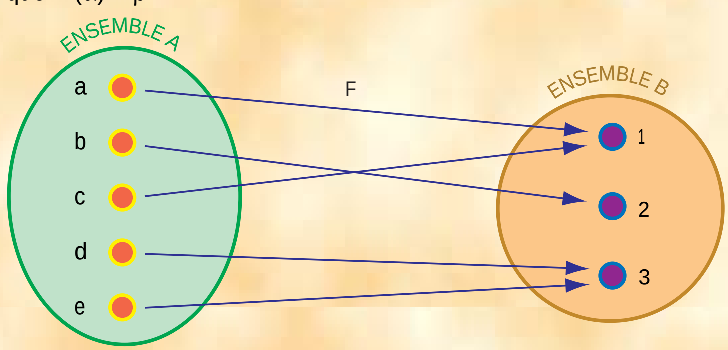
Les axiomes de grands cardinaux sont vis-à-vis de la théorie Zermelo-Fraenkel comme l'est l'hypothèse du continu : on peut choisir, sans risquer d'introduire de contradiction, de les ajouter ou d'ajouter leur négation (en fait, les ajouter pourrait, en théorie, introduire une contradiction, mais personne en pratique n'en trouve jamais. Toutefois, contrairement à ce qui se passe pour l'hypothèse du continu, il est naturel de les tenir pour vrais. En effet, adopter leur négation serait limiter la taille des ensembles possibles, ce qui n'est pas naturel. De plus, cette même négation contredit un principe d'ouverture et de tolérance qui suggère d'accepter tous les objets qui n'introduisent pas d'incohérence. On dit que les axiomes des grands cardinaux sont vrais *a priori*. Une autre raison conduit à accepter les axiomes des grands cardinaux. D'une façon qui a étonné les mathématiciens, ces axiomes de grands cardinaux se classent linéairement les uns par rapport aux autres comme s'ils désignaient véritablement une hiérarchie d'infinis (au-delà de celle mise en lumière par Cantor et la complétant). S'ils n'étaient qu'un jeu formel et gratuit de logiciens, rien n'expliquerait qu'ils s'ordonnent ainsi les uns relativement aux autres. Pour les logiciens K. Kanamori et M. Magidor, «cet aspect hiérarchique de la théorie des grands cardinaux est quelque peu mystérieux, mais c'est aussi un argument fort en faveur de l'adoption des axiomes de grands cardinaux et du fait qu'ils fournissent les extensions naturelles de Zermelo-Fraenkel».

La possibilité de trouver des liens entre les axiomes de grands cardinaux et l'hypothèse du continu est réelle, et des résultats partiels ont déjà été obtenus : certaines parties infinies de ℝ dont on ne sait pas montrer dans Zermelo-Fraenkel qu'elles peuvent être mises en bijection avec ℕ ou ℝ, peuvent être mises en bijection avec ℕ ou ℝ grâce aux axiomes de grands cardinaux.

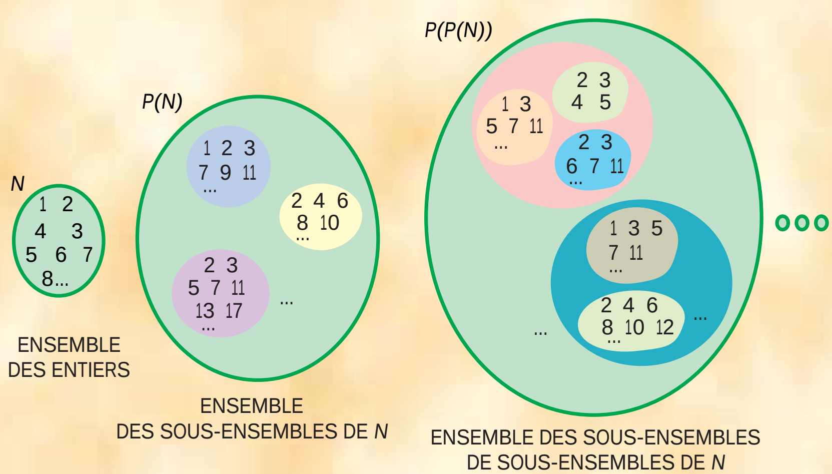
La théorie que Cantor a créée semblerait donc tenir debout et, mieux que cela, progresser par ajouts de nouveaux axiomes naturels. L'infini actuel n'est ni paradoxal, ni logiquement insatisfaisant (comme l'indécidabilité de l'hypothèse du continu nous a conduit à le craindre un moment), mais au contraire cohérent et vraisemblable. Comme en physique, où notre conception du temps et de l'espace a dû être revue à la lumière de la théorie de la relativité (laquelle, en dépit des premières apparences, n'est nullement paradoxale), en mathématiques la conception de l'infini actuel force à reconstruire notre idée des objets et à revoir notre conception de la réalité mathématique. À celui qui accepte cette réforme profonde des conceptions, on ne peut opposer aucun paradoxe. On peut même penser que les situations logiquement insatisfaisantes qu'on croit encore percevoir se dissiperont à mesure que notre esprit acceptera pleinement le nouvel univers conceptuel proposé par ces mathématiques de l'infini actuel, qu'aujourd'hui encore les mathématiciens affinent et perfectionnent.

UN AXIOME DÉFINISSANT UN GRAND CARDINAL

Une surjection de *A* vers *B* est une application *F* qui atteint tout point de *B* : pour tout élément β dans l'ensemble *B*, il existe un élément α de l'ensemble *A* tel que *F* (α) = β.



S'il existe une surjection de l'ensemble *A* vers l'ensemble *B*, on dit que *A* est plus gros que *B*. Si, de plus, il n'existe pas de surjection de *B* vers *A*, on dit que *A* est strictement plus gros que *B*.
Cantor a montré que l'ensemble *P(A)* des parties d'un ensemble *A* est toujours strictement plus gros que l'ensemble *A*. Il en résulte qu'il existe une infinité d'ensembles de plus en plus gros, *N*, *P(N)*, *P(P(N))*, et, accessoirement, qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.



Voici un exemple d'axiome de grands cardinaux : il existe un ensemble non dénombrable *A* tel que, si *A* est strictement plus gros que *B*, alors *A* est aussi strictement plus gros que l'ensemble *P(B)* des parties de *B*, plus gros que l'ensemble *P(P(B))* des parties de *P(B)*, etc. et plus généralement, plus gros que tout ensemble définissable à partir de l'ensemble *B*. Le cardinal de *A* est un grand cardinal. Cependant ces axiomes sont, dans la grande majorité des cas, des indécidables de Gödel : avec les axiomes habituels de la théorie des ensembles, on ne peut prouver ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux. Il faut donc les accepter tels quels, sans que l'on puisse espérer les démontrer à partir des axiomes de la théorie des ensembles. Ils sont pourtant utiles.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique théorique à l'Université de Lille.

A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, 1994.

J.W. DAUBEN, *Georg Cantor : His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, 1979.

J.-L. KRIVINE, *Théorie des ensembles*, Cassini, Paris, 1998.

Bernard BOLZANO, *Les paradoxes de l'infini*, introduction, traduction de l'allemand et notes par Hourya Sinaceur, Seuil, 1993.

Jean-Paul DELAHAYE, *Jeux mathématiques et mathématiques des jeux*, chapitre 7 : Des jeux infinis aux grands ensembles, Belin/Pour la science, 1998.

Infini des mathématiciens, infini des philosophes, ouvrage collectif sous la direction de F. Monnoyeur, Belin, 1992.