Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université Lille 1 *

* Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, UMR CNRS 8022, Bât. M3 extension

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : LES FILES DE VOITURES

Une section d'autoroute d'une longueur de 18 km possède deux voies *R* (pour rapide) et *L* (pour lente). Les voitures ne changent pas de file. La voie *L* avance à 18 km/h (5 m par seconde). Les voitures sur la voie *L* sont séparées de 5 m et donc, en un point donné de la voie *L*, il passe une voiture chaque seconde. Une voiture engagée sur *L* y reste 1 heure avant d'arriver à l'extrémité de la section. À chaque instant, il y a donc 3600 voitures sur la voie lente *L*. La voie rapide *R* avance à 72 km/h (20 m par seconde). Les voitures sur la voie *R* sont espacées de 10 m et, donc, en un point donné de la voie *R*, il passe 2 voitures par seconde. Une voiture engagée sur *R* y reste 15 minutes. Puisque la section mesure 18 km, à chaque instant, il y a 1800 voitures sur la voie *R*. Il résulte aussi de ces données qu'une voiture sur la voie *R* double 3 voitures de *L* par seconde et qu'une voiture sur la voie *L* est doublée 3 fois toutes les 2 secondes.

Je suis dans une voiture sur cette autoroute, les yeux bandés. On m'indique qu'il se produit un dépassement et on me pose les questions : Quelle est la probabilité P_1 que je sois dans une voiture qui double ? Quelle est la probabilité P_2 que je sois dans une voiture doublée ?
Bien évidemment, on suppose que je ne peux pas percevoir la vitesse de la voiture dans laquelle je suis. Je veux mettre toutes les chances de mon côté. Je réfléchis soigneusement. Trois raisonnements sont possibles.

Raisonnement 1. La réponse aux questions Q_1 et Q_2 ne dépend pas des données précises du problème car, à chaque dépassement qui se produit, il y a une voiture dépassée et une voiture qui dépasse : j'ai donc autant de chance d'être dans l'une ou l'autre. La réponse est **$P_1 = P_2 = 1/2$.**

Raisonnement 2. Sur les 18 kilomètres de la section d'autoroute, il y a 3600 voitures lentes et 1800 voitures rapides. J'ai donc 2 chances sur trois d'être dans une voiture lente et 1 chance sur trois d'être dans une voiture rapide. Si je suis dans une voiture lente, je suis dépassé, si je suis dans une voiture rapide, je dépasse. Sans information particulière, j'ai donc deux fois plus de chances d'être dans une voiture qui est dépassée que dans une voiture qui dépasse, et les réponses sont donc **$P_1 = 1/3$ et $P_2 = 2/3$.**

Raisonnement 3. À l'entrée de la section d'autoroute concernée, il passe une voiture lente par seconde et deux voitures rapides par seconde (c'est le cas en fait en chaque point du tronçon). En se présentant à l'entrée de cette section d'autoroute, une voiture ne sait pas quelle est la voie rapide et quelle est la voie lente. Les voitures se disposent donc au hasard et une voiture se retrouve donc 2 fois plus souvent sur la voie rapide que sur la voie lente. J'ai donc deux fois plus de chances d'être dans une voiture qui dépasse que dans une voiture qui est dépassée. Les réponses sont donc **$P_1 = 2/3$ et $P_2 = 1/3$.**

C'est ennuyeux, les trois raisonnements aboutissent à trois conclusions différentes. Comment se sortir du paradoxe ?

Solution

Merci à Jef van Staeyen qui m'a fait parvenir une solution et des détails subtils sur l'analyse de la situation et sur la façon dont on doit envisager ce type de problèmes.
Merci aussi à Nicolas Vaneecloo, Virginie Delsart, Jean-Jacques Devulder et Jean-Pierre Bondue qui m'ont fait parvenir des solutions ou des arguments intéressants permettant d'analyser le paradoxe

Le paradoxe est un peu semblable au célèbre paradoxe de Bertrand.
(voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Bertrand)

Les données ne fixent pas assez précisément le problème pour que la situation se modélise de manière certaine et qu'une probabilité déterminée puisse être déduite.
En complétant les données, c'est-à-dire en précisant le problème, on peut se retrouver dans chacun des trois cas envisagés. D'autres modèles que ceux que je propose ici sont aussi envisageables.

A - On organise le pari de la manière suivante. Les organisateurs me placent dans une voiture choisie au hasard qui va emprunter la section. Ils me bandent les yeux et, à un moment du parcours avant qu'il soit envisageable que ma

voiture quitte la section (c'est-à-dire durant les 15 minutes qui suivent l'entrée sur la section), ils m'interrogent. C'est clairement le troisième modèle qui est bon. J'ai donc deux chances sur trois d'être dans une voiture qui dépasse.

B - On survole (en hélicoptère par exemple) la section d'autoroute. Les organisateurs choisissent une voiture au hasard uniformément sur la section concernée, c'est-à-dire sans en favoriser aucune parmi celles qui sont sur la section à l'instant du choix. Ils me déposent dedans puis, dès qu'un dépassement se produit, ils me demandent si je suis dans la voiture dépassée ou dans celle qui dépasse. Cette fois, le raisonnement 2 s'applique et j'ai donc deux chances sur trois d'être dépassé.

C - On survole la section d'autoroute. Les organisateurs repèrent un dépassement en train de se produire au hasard. Ils choisissent au hasard l'une des voitures impliquées. Ils me déposent dedans et m'interrogent. Dans ce cas, bien sûr, c'est le raisonnement 1 qui est valable.

Entre ces trois façons d'organiser le pari, on notera que seule la première semble raisonnable. Les autres font intervenir des dispositifs difficiles à réaliser ou relevant carrément de la science-fiction. Au total, il semble donc que le raisonnement 3 est le mieux adapté. Je dois donc parier que je suis dans la voiture qui dépasse. Insistons cependant sur le fait que cette solution, que je trouve préférable, ne l'est qu'après avoir complété l'énoncé et qu'elle n'était donc pas inévitable et peut très légitimement être encore discutée.

NOUVEAU PARADOXE : LA LONGUEUR DES FLEUVES

Julien adore les paris et les chiffres. Durant le cours de géographie, il s'ennuie et propose à son voisin Pierre de parier sur les nombres que va mentionner le professeur qui est en train d'expliquer les réseaux hydrographiques terrestres. Julien propose à Alain de miser vingt euros sur les neuf prochains nombres qui seront mentionnés (des longueurs de fleuves ou de rivières). Julien dit à Pierre :

- « On ne considérera que le premier chiffre significatif des longueurs des cours d'eau mentionnés. Je prends le paquet des trois premiers chiffres A = {1, 2, 3} et je te laisse le paquet des six autres chiffres B = {4, 5, 6, 7, 8, 9}. Celui qui, dans les neuf nombres qui vont venir, aura le plus souvent un premier chiffre dans son paquet gagnera et recevra donc vingt euros de l'autre. Si les longueurs mentionnées sont par exemple 243 km, 876 km, 1222 km, 92 km, 4330 km, 982 km, 3445 km, 2122 km, 832 km, dont les premiers chiffres sont 2, 8, 1, 9, 4, 9, 3, 2, 8, tu auras gagné, puisqu'il y a cinq chiffres du paquet B et quatre du paquet A ».

Alain est enchanté, il va certainement gagner les vingt euros car, ayant en sa faveur le paquet B de 6 chiffres alors que Julien n'en a que 3 dans le paquet A, il a toutes les chances de gagner.

C'est une illusion et Julien – qui est un rusé parieur – a, en réalité, une probabilité de gagner égale à 73,77 %.

Cela semble paradoxal. Saurez-vous expliquer et justifier ce 73,77 % ?