

Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques
pour ceux qui aiment se prendre la tête

* Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022,
Bât. M3 extension

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université Lille 1 *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@lfl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : GAGNER AU LOTO

Si l'on admet que les organisateurs des jeux de Loto ne trichent pas, alors toutes les grilles ont la même probabilité d'être tirées et cela à chaque tirage qui sera indépendant des précédents. En particulier, il est inutile de noter les numéros déjà tombés lors des tirages passés et de les éviter (si l'on pense qu'ayant déjà été tirés ils le seront moins) ou de les jouer de préférence aux autres (si l'on pense que ce sont des numéros chanceux dont il faut tirer parti).

Tout comportement tentant d'exploiter des informations sur les numéros déjà tombés est une forme de superstition. Y succomber est certes un penchant naturel et c'est une forme de paradoxe que de nombreuses personnes ayant suivi des cours de probabilités basent leurs martingales pour le Loto sur les numéros anciennement tombés. Cependant, ce n'est pas de ce paradoxe psychologique dont nous voulons parler ici. Le paradoxe qui nous intéresse est que :

- même si les organisateurs du jeu ne trichent pas et que le passé des tirages n'a donc pas la moindre influence sur les prochains, il est faux d'en déduire que l'on doit jouer au hasard et que les numéros choisis quand on coche une grille sont sans importance. Certaines grilles sont meilleures que d'autres pour une raison sérieuse qui ne contredit en rien les lois admises des probabilités.

Pourquoi ?

Solution

Merci aux nombreux lecteurs qui m'ont fait parvenir leurs analyses et réponses. Ce sont dans l'ordre d'arrivée : Jef Van Staeyen, Virginie Delsart, Nicolas Vaneecloo, Jean-Paul Krivine, Hervé Moritz, Gérard Petit, Jean-Jacques Devulder, Olivier Sirven, Pierre Behague, Christophe Vieren.

Contrairement aux loteries où les montants gagnés sont fixés, le Loto, tel qu'il se pratique en France et dans de nombreux autres pays, distribue les sommes gagnées et les répartit entre les joueurs ayant coché les bonnes grilles. Si une grille gagnante a souvent été jouée, les gagnants recevront moins d'argent que si elle a été peu jouée, car ils

doivent se partager la somme gagnée par la grille. L'intérêt d'un joueur est donc de jouer les grilles les moins souvent jouées.

En choisissant une grille que personne d'autre ne joue, un joueur n'augmente pas sa probabilité de gagner, mais il augmente la somme d'argent qu'il gagne le jour où il gagne. Son espérance de gain – la somme moyenne qu'il gagne à chaque fois qu'il joue – augmente donc.

Assez curieusement, la *Française des Jeux*, qui organise le Loto en France, publie les numéros tombés aux tirages passés, mais ne publie pas la fréquence avec laquelle les numéros sont joués et encore moins le détail pour chaque grille possible du nombre de joueurs l'ayant jouée (ce qui serait possible grâce à Internet). C'est assez étrange et malsain, puisqu'en se comportant ainsi la *Française des Jeux* encourage les comportements superstitieux et décourage les comportements rationnels. Si elle publiait les données des numéros joués et des grilles jouées, cela ne l'empêcherait nullement de gagner de l'argent, puisqu'elle distribue une somme d'argent fixée à l'avance (un peu moins de 55 % des sommes jouées) et qu'il lui est donc complètement indifférent que les joueurs organisent leurs choix de grilles en fonction d'une méthode rationnelle, ou non. Une explication de l'attitude de la *Française des Jeux* pourrait être que certaines des personnes ayant accès à ces données utiles et secrètes les exploitent à leur profit. Le secret sur les données utiles engendre légitimement des soupçons. Outre que ne redistribuer que moins de 55 % des sommes jouées est scandaleux – les casinos en redistribuent plus de 90 % –, il y a là une très bonne raison de ne jamais jouer au Loto de la *Française des Jeux*.

Ceux qui ne peuvent pas se passer du plaisir de rêver que l'on éprouve en remplissant une grille, et qui voudraient rendre leurs méthodes de jeux plus rationnelles, doivent réfléchir aux grilles les plus jouées pour les éviter (par exemple, ne pas jouer des numéros qui se suivent comme 10 11 12 13 14 15) et chercher à connaître plus généralement les numéros que les joueurs cochent le plus fréquemment.

Pour connaître les numéros joués préférentiellement, on peut faire appel au bon sens psychologique. Les joueurs

composent assez souvent leurs grilles à partir de dates. Cela favorise les nombres entre 1 et 12 (les numéros des mois), les nombres entre 1 et 31 (les numéros des jours), et le 19 et le 20 (à cause des années récentes qui commencent par 19 ou par 20). On sait aussi que les numéros pris dans le monde réel sont souvent soumis à la loi de Benford qui favorise les nombres commençant par un 1 par rapport à ceux commençant par un 2, ceux commençant par un 2 par rapport à ceux commençant par un 3, etc.

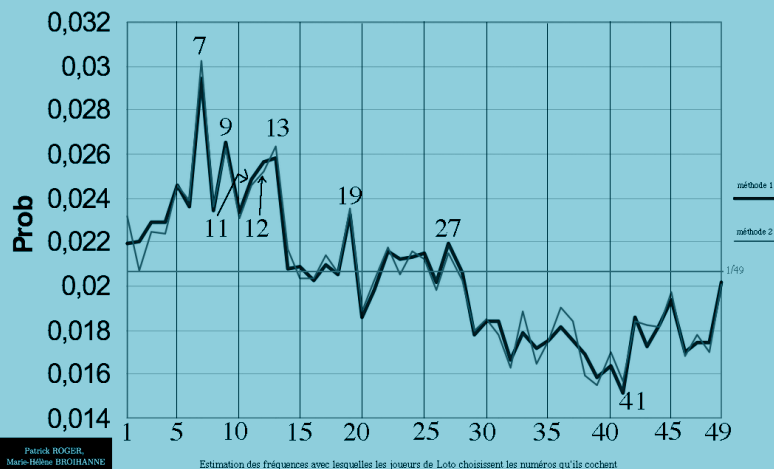
L'hypothèse que les petits numéros sont plus joués que les autres peut être confirmée très simplement en considérant le nombre de gagnants des diverses grilles et en vérifiant que les grilles composées de petits numéros ont plus de gagnants que les autres. Les tests statistiques menés dans ce sens donnent des résultats très nets. On trouve par exemple que (a) la moyenne des numéros des grilles pour lesquelles il n'y a eu aucun gagnant de rang 1 est 26,91 ; (b) la moyenne des numéros des grilles ayant eu 8 gagnants de rang 1 est 23,68 ; (c) la moyenne des numéros des grilles ayant 16 gagnants de rang 1 est 21,66. Plus la moyenne des numéros d'une grille est faible, plus elle a de gagnants..., et moins elle rapporte. Dernière confirmation élémentaire de la préférence pour les petits numéros : le plus petit gain obtenu par des gagnants de rang 1 l'a été le 27 août 1994 pour la grille 4-5-7-14-15-17 qui ne comporte aucun numéro au-delà de 17.

UNE STATISTIQUE SECRÈTE, MAIS CONNUE !

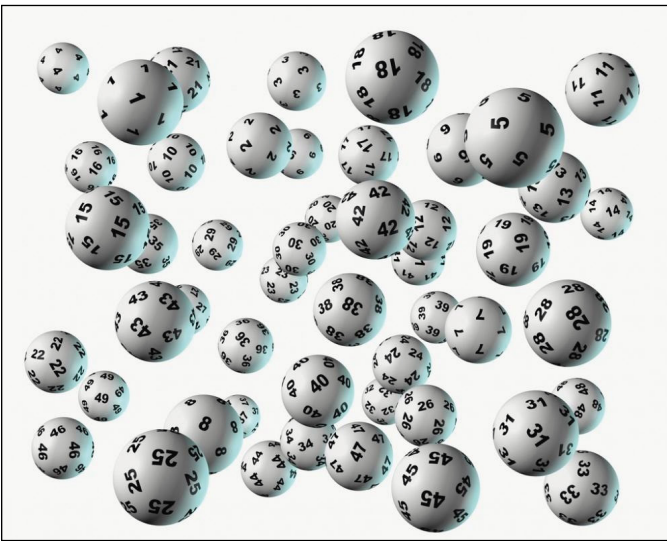
Malgré le secret de la *Française des Jeux* concernant les fréquences avec lesquelles les numéros sont effectivement joués, les statisticiens réussissent à les connaître. En effet, deux études concordantes, fondées sur le nombre de gagnants aux divers rangs et utilisant des techniques d'estimations statistiques indirectes, ont conduit à proposer une loi de préférence des numéros. La science statistique réussit à faire parler les données disponibles et à en tirer des informations qui semblaient inaccessibles !

Sans surprise, le numéro 7 est le numéro favori des joueurs et il est joué 1,7 fois plus qu'il ne le serait si les joueurs menaient leurs choix au hasard. Les cinq numéros préférés sont dans l'ordre 7, 9, 11, 12, 13. Les numéros les moins joués sont 32, 38, 39, 40 et 41.

Plus joués 7 9 13 12 11 5 Moins joués 41 39 32 38 40



Voici la courbe indiquant les numéros les plus joués par les joueurs du Loto de la *Française des Jeux*. Chaque numéro, a priori, devrait être joué avec une probabilité de 1/49. Cependant, parce que les joueurs choisissent des dates ou des numéros provenant de données réelles ou parce que certains numéros ne plaisent pas (le 2 par exemple), les probabilités se trouvent parfois au-dessus de 1/49 ou en dessous. La *Française des Jeux* ne publie pas ces données. Elles ont été calculées par des méthodes d'estimations statistiques indirectes. Deux méthodes différentes ont été utilisées. Le fait qu'elles coïncident presque en tout point assure qu'elles sont proches des données réelles gardées secrètes. On remarque que le numéro 7 est le plus populaire et qu'une tendance générale est que plus un numéro est grand, moins il est joué, ce qui est conforme aux explications invoquant l'attrait des joueurs pour les dates et une incidence de la loi de Benford.



Le fait que ces numéros les moins joués aient été publiés peut avoir une influence sur les prochains tirages, mais elle sera probablement assez faible et donc une grille utilisant des numéros parmi les moins joués dans le passé a toutes les chances d'être une grille peu jouée dans le futur. N'oubliez pas cependant que, même en utilisant les données statistiques des numéros joués par les parieurs, il apparaît quasiment impossible de rattraper le pourcentage pris par *la Française des Jeux* et qu'elle ne redistribue pas. Autrement dit, il semble qu'au Loto aucune méthode ne conduise à des stratégies de jeux où l'espérance de gains soit supérieure à l'argent dépensé pour jouer. Il vaut mieux ne pas jouer !

L'excellent livre *Lotomania : une approche scientifique du jeu et du comportement des joueurs*¹ vous sera d'une grande utilité pour comprendre les aspects probabilistes, économiques et psychologiques des jeux de loterie.

NOUVEAU PARADOXE : UN MONDE MATHÉMATIQUE IMMOBILE

Le principe de récurrence est l'un des outils les plus puissants du raisonnement mathématique. Il consiste, pour établir une propriété générale du type « pour tout n , $P(n)$ », à prouver deux affirmations :

- (i) $P(0)$ est vrai
- (ii) si $P(n)$ est vrai pour $n = 0, 1, \dots, k$ alors $P(k + 1)$ est vrai.

Dans un raisonnement par récurrence, malheureusement l'intuition est un peu perdue, aussi des erreurs deviennent possibles. Voici un exemple de raisonnement par récurrence conduisant à une absurdité.

Nous allons démontrer qu'en mathématiques rien ne bouge, plus précisément, nous allons établir que toutes les fonctions $x \rightarrow x^n$ (n un entier fixé) sont des fonctions constantes.

(i) C'est vrai pour $n = 0$ car $x^0 = 1$ (par convention) et que la dérivée d'une constante est la fonction nulle.

(ii) Supposons que c'est vrai pour $n = 0, 1, \dots, k$, c'est-à-dire que la dérivée de la fonction $x \rightarrow x^n$ est nulle :

$$(x^n)' = 0 \text{ pour } n = 0, 1, \dots, k.$$

Utilisons maintenant la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$.

On a :

$$(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)'$$

On obtient 0 car, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $x' = (x^1)' = 0$ (on utilise l'hypothèse avec $n = 1$) et $(x^k)' = 0$ (on utilise l'hypothèse avec $n = k$).

Nous avons donc $(x^{k+1})' = 0$, ce que nous souhaitons.

Qu'est-ce qui cloche ? ■

¹ Patrick Roger, éd. Village Mondial, Pearson Education France, 2005.