Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022,
Bât. M3 extension

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université Lille 1 *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : LE DÉ LE PLUS FORT

On dispose de trois dés entièrement blancs ayant chacun 6 faces et de 18 gommettes autocollantes à mettre sur les 18 faces des trois dés. Ces gommettes portent les numéros 1, 2, 3, ..., 18.

(a) Le joueur A place les gommettes comme il veut sur les 18 faces (une gommette par face).

(b) Le joueur B choisit alors un des trois dés.

(c) Le joueur A choisit un des deux dés restants.

(d) Les joueurs A et B lancent chacun leur dé. Celui qui obtient le plus gagne.

Imaginons, par exemple, que le joueur A compose un dé avec les gommettes 1, 2, 3, 4, 5, 6, un autre avec les gommettes 7, 8, 9, 10, 11, 12 et le troisième avec les gommettes 13, 14, 15, 16, 17, 18. Le joueur B aura alors la certitude de gagner : il choisira le troisième dé – qui est le plus fort – et alors, quel que soit le choix du joueur A dans la phase (c) du jeu, le joueur B sera certain de gagner dans la phase finale (d). Choisir en premier un des trois dés semble un avantage décisif.

Tout ne sera pas toujours aussi net, mais on est tenté de penser qu'en choisissant le dé le plus fort, le joueur B a toujours un jeu favorable, c'est-à-dire qui lui donne une probabilité de gagner au moins égale à 1/2 dans la phase finale. Cela est faux : le joueur A qui colle les gommettes sur les faces des trois dés peut le faire d'une telle façon que la phase finale lui est toujours favorable, c'est-à-dire lui donne une probabilité strictement supérieure à 1/2 de gagner. Comment doit procéder le joueur A et qu'est-ce qui explique que le joueur A puisse disposer d'un dé plus fort que le dé choisi par B, qui pourtant a choisi le dé qu'il désirait en premier ?

Solution

Merci et bravo à Nicolas Vaneecloo, Virginie Delsart, Thomas Delclite, Jef van Staeyen et Orane Bayart qui m'ont fait parvenir une bonne solution pour ce problème plutôt difficile.

Une façon (mais ce n'est pas la seule) de gagner pour le joueur A est la suivante. Il colle les gommettes pour obtenir :

Dé 1 : 18, 10, 9, 8, 7, 5.

Dé 2 : 17, 16, 15, 4, 3, 2.

Dé 3 : 14, 13, 12, 11, 6, 1.

Le tableau ci-contre montre que le dé 1 contre le dé 2 est gagnant dans 21 cas sur 36. De même, le dé 2 contre le dé 3, et le dé 3 contre le dé 1.

Même si cela est très étonnant, on a une situation cyclique : le dé 1 bat le dé 2, qui bat le dé 3 qui bat le dé 1. On parle de *non-transitivité* : le fait que x gagne contre y et que y gagne contre z n'implique pas que x gagne contre z.

Le paradoxe est alors expliqué : quel que soit le choix opéré par B dans la phase (b) du jeu, le joueur A peut répliquer en choisissant un dé plus fort :

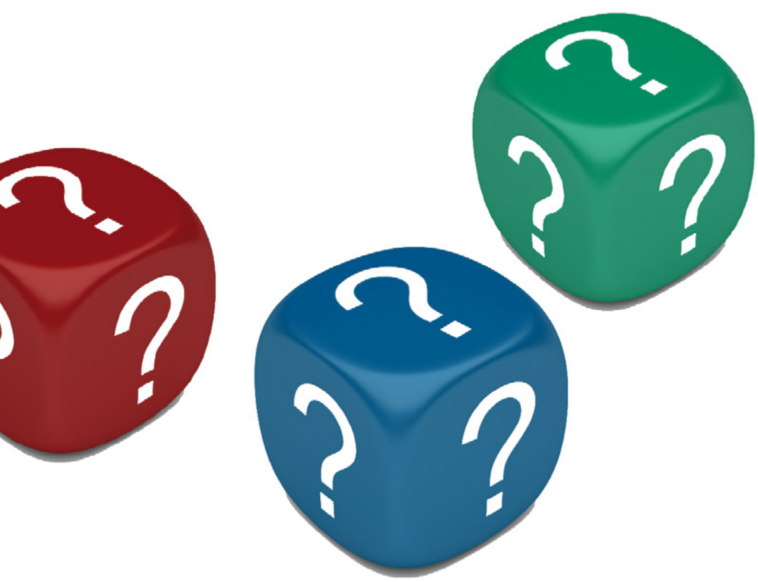
- si B choisit le dé 1, A choisit le dé 3 ;
- si B choisit le dé 2, A choisit le dé 1 ;
- si B choisit le dé 3, A choisit le dé 2.

Le joueur A, bien qu'il choisisse un dé après le joueur B, gagnera donc avec une probabilité de 21/36, c'est-à-dire avec une probabilité de 58,3 %.

Il a été démontré que le joueur A ne pouvait pas obtenir mieux que 21/36.

Chose étonnante encore, si les trois dés sont lancés simultanément (il y a 216 résultats équiprobables possibles), on trouve que le dé 2 a une probabilité de gagner supérieure aux deux autres : 90/216 pour le dé 2, 63/216 pour le dé 1, et 63/216 pour le dé 3. L'équivalence des trois dés, quand ils sont opposés deux à deux, n'est plus vérifiée quand ils jouent tous les trois ensemble !

dé1	dé2	gagnant	dé2	dé3	gagnant	dé3	dé1	gagnant
18	17	1	17	14	2	14	18	1
18	16	1	17	13	2	14	10	3
18	15	1	17	12	2	14	9	3
18	4	1	17	11	2	14	8	3
18	3	1	17	6	2	14	7	3
18	2	1	17	1	2	14	5	3
10	17	2	16	14	2	13	18	1
10	16	2	16	13	2	13	10	3
10	15	2	16	12	2	13	9	3
10	4	1	16	11	2	13	8	3
10	3	1	16	6	2	13	7	3
10	2	1	16	1	2	13	5	3
9	17	2	15	14	2	12	18	1
9	16	2	15	13	2	12	10	3
9	15	2	15	12	2	12	9	3
9	4	1	15	11	2	12	8	3
9	3	1	15	6	2	12	7	3
9	2	1	15	1	2	12	5	3
8	17	2	4	14	3	11	18	1
8	16	2	4	13	3	11	10	3
8	15	2	4	12	3	11	9	3
8	4	1	4	11	3	11	8	3
8	3	1	4	6	3	11	7	3
8	2	1	4	1	2	11	5	3
7	17	2	3	14	3	6	18	1
7	16	2	3	13	3	6	10	1
7	15	2	3	12	3	6	9	1
7	4	1	3	11	3	6	8	1
7	3	1	3	6	3	6	7	1
7	2	1	3	1	2	6	5	3
5	17	2	2	14	3	1	18	1
5	16	2	2	13	3	1	10	1
5	15	2	2	12	3	1	9	1
5	4	1	2	11	3	1	8	1
5	3	1	2	6	3	1	7	1
5	2	1	2	1	2	1	5	1
		21 dé1			21 dé2			21 dé3



NOUVEAU PARADOXE : GAGNER AU LOTO

Si on admet que les organisateurs des jeux de Loto ne trichent pas, alors toutes les grilles ont la même probabilité d'être tirées et cela à chaque tirage qui sera indépendant des précédents. En particulier, il est inutile de noter les numéros déjà tombés lors des tirages passés et de les éviter (si on pense qu'ayant été déjà tirés, ils le seront moins) ou de les jouer de préférence aux autres (si on pense que ce sont des numéros chanceux dont il faut tirer parti).

Tout comportement tentant d'exploiter des informations sur les numéros déjà tombés est une forme de superstition. Y succomber est certes un penchant naturel et c'est une forme de paradoxe que de nombreuses personnes ayant suivi des cours de probabilités basent leurs martingales pour le Loto sur les numéros anciennement tombés. Cependant, ce n'est pas de ce paradoxe psychologique que nous voulons parler ici. Le paradoxe qui nous intéresse est que :

- même si les organisateurs du jeu ne trichent pas et que le passé des tirages n'a donc pas la moindre influence sur les prochains, il est faux d'en déduire qu'on doit jouer au hasard et que les numéros choisis quand on coche une grille sont sans importance. Certaines grilles sont meilleures que d'autres pour une raison sérieuse qui ne contredit en rien les lois admises des probabilités.

Pourquoi ?