Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022,
Bât. M3 extension

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université Lille 1 *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : S'OPPOSER AU HASARD DES NAISSANCES ?

Dans un pays lointain, les femmes ont des enfants qui sont de sexe masculin dans 50 % des cas exactement et, bien sûr, de sexe féminin dans 50 % des cas. Aucun biais d'aucune sorte n'a jamais été observé chez aucune femme ou catégorie de femmes. Autrement dit, tout se passe comme si le sexe d'un enfant à naître était tiré au hasard avec une pièce de monnaie non truquée. Le gouvernement décide que seuls les couples ayant eu au moins une fille toucheront leur retraite. En réaction à cette mesure, chaque couple adopte la stratégie suivante : (1) si leur premier enfant est une fille, il n'en a pas d'autres ; (2) si le premier enfant est un garçon, le couple a un second enfant qui sera le dernier si c'est une fille ; (...) et ainsi de suite, chaque couple ayant des enfants jusqu'à avoir une fille qui est alors leur dernier enfant.
Cette stratégie a deux conséquences : il n'y a aucune famille sans fille et une famille sur deux n'a pas de garçon. Cela favorise donc clairement les filles. Pourtant, au bout de quelques années, lorsque le ministère des statistiques évalue le rapport [nombre de filles]/[nombre de garçons] depuis que la mesure a été adoptée, il découvre qu'à très peu de chose près il a eu autant de garçons que de filles. Comment expliquer ce paradoxe ?

Solution

Merci et bravo aux lecteurs qui ont découvert la solution et me l'ont fait parvenir. Ce sont, par ordre d'arrivée des réponses : Jef Van Staeyen, Thomas Delclite, Tony Sanctorum, Virginie Delsart, Nicolas Vaneecloo, Christophe Vuylsteker, Jean-Pierre Bondue et Hervé Louis Moritz.

Les stratégies des familles n'ont aucune influence sur la proportion de filles et, d'ailleurs, il en serait de même si la probabilité de naissance des filles était différente de 50 %. Aussi surprenant que cela paraisse, au premier abord, les stratégies familiales appliquées par les couples n'ont absolument aucun effet sur le rapport garçon/fille. On peut s'en rendre compte sans faire le moindre calcul, car si l'on s'interroge sur la probabilité qu'a un enfant à naître d'être une fille, il est clair que :

- quel que soit son rang dans une famille, cette probabilité est 1/2 ; le passé n'influe pas sur la naissance à venir (c'est du moins l'hypothèse qu'on a adoptée et que l'énoncé explicitait en disant qu'aucun biais n'avait jamais été observé).

Tout enfant à naître ayant une probabilité de 50 % d'être une fille, il naît donc en moyenne une fille pour deux naissances. Quelles que soient les règles adoptées par les familles pour cesser d'avoir des enfants en fonction des précédentes naissances dans la famille, les proportions de filles et de garçons restent inchangées. C'est encore vrai si le ratio des naissances fille/garçon n'est pas 1, et c'est vrai encore pour toute autre stratégie familiale : toutes se valent et aucune n'a le moindre effet perturbateur.

Il se peut que vous ayez des doutes. Pour vous convaincre, nous allons détailler un calcul où, pour simplifier, nous supposerons que les familles n'ont jamais plus de quatre enfants (mais vous pouvez reprendre le calcul avec 5, 6 ou n enfants ou même sans limitation du nombre d'enfants).

Probabilité qu'une famille possède un seul enfant : 1/2.

La famille est alors du type : [fille]

Probabilité qu'une famille possède 2 enfants : 1/4.

La famille est du type : [garçon, fille]

Probabilité qu'une famille possède 3 enfants : 1/8.

La famille est du type : [garçon, garçon, fille]

Probabilité qu'une famille possède 4 enfants : 1/8.

La famille est une fois sur deux du type : [garçon, garçon, garçon, fille]

et une fois sur deux du type : [garçon, garçon, garçon, garçon]

Donc, sur 16 familles, il y a en moyenne 8 familles du type [fille], 4 du type [garçon, fille], deux du type [garçon, garçon, fille], une du type [garçon, garçon, garçon, fille] et une du type [garçon, garçon, garçon, garçon]. Cela fait au total 8 + 4 + 2 + 1 = 15 filles et 4 + 4 + 3 + 4 = 15 garçons.

L'effort fait par chaque famille pour avoir une fille ne change pas la proportion de garçons et de filles, mais conduit cependant à une situation où la plupart des familles sont satisfaites car elles ont au moins une fille (dans notre exemple, 15 familles sur 16 ont une fille).

Signalons que, dans la réalité d'aujourd'hui en Inde et en Chine, les règles traditionnelles sur les dots et d'autres raisons socioculturelles font que les familles souhaitent avoir en priorité des garçons. Il en résulte que la proportion de filles à la naissance est nettement inférieure à celle des garçons. Cela n'est pas la conséquence de stratégies analogues à celle envisagée plus haut mais est dû à des avortements sélectifs organisés par les familles qui, grâce aux échographies, savent au bout de quelques semaines de grossesse le sexe de l'enfant à naître. Ces comportements sont combattus par les autorités car ils conduisent à un déséquilibre entre hommes et femmes susceptible à terme de créer des problèmes sociaux. Dans plusieurs régions d'Inde, on compte déjà plus de 110 garçons pour 100 filles.

Une autre remarque mérite d'être formulée. L'invariance du rapport fille/garçon face aux stratégies familiales du type de notre énoncé ne reste pas vraie quand on change les hypothèses. Si, pour des raisons hormonales ou autres, certains couples donnent naissance préférentiellement à des filles et d'autres préférentiellement à des garçons, alors il n'y aura plus invariance. Si on imagine, par exemple, qu'une femme sur deux a 90 % de chances d'avoir un garçon à chaque accouchement, et qu'une femme sur deux a 90 % de chances d'avoir une fille à chaque accouchement (cette hypothèse préserve une symétrie générale entre garçons et filles), alors la stratégie mentionnée dans l'énoncé conduira à un nombre de naissances de garçons bien supérieur au nombre de naissances de filles : une « famille à filles » a peu d'enfants (un le plus souvent) et une « famille à garçons » en a beaucoup (tous les enfants sont des garçons sauf le dernier). Le résultat mentionné reste vrai si on remplace 90 % par X % avec X > 50, car les familles à filles ont un peu moins d'enfants que les familles à garçons. Si l'effet recherché par la loi sur les retraites était d'augmenter la proportion de filles et qu'il y a réellement des familles à filles et des familles à garçons, alors le législateur obtiendra l'inverse de ce qu'il espérait. Encore un paradoxe !

NOUVEAU PARADOXE : ENCORE UNE HISTOIRE DE CHAPEAUX

Neuf joueurs portent des chapeaux dont la couleur est rouge, noire ou blanche. Chacun peut voir tous les autres chapeaux mais pas le sien. Les chapeaux ont été tirés au hasard à l'aide d'un dé (1 et 2 donnent noir, 3 et 4 donnent rouge, 5 et 6 donnent blanc).

L'arbitre du jeu annonce que chaque joueur doit essayer de deviner la couleur de son chapeau en voyant les autres chapeaux, et que, si *au moins trois d'entre eux* donnent la bonne réponse, alors ils auront gagné un voyage à Londres tous ensemble. Les joueurs ont pu convenir d'une stratégie collective avant que les chapeaux soient disposés sur leurs têtes, mais ils donnent leur réponse simultanément sans avoir plus aucun échange entre eux une fois les chapeaux en place.

En répondant au hasard, les joueurs auront une chance non négligeable de perdre. Précisément, ils perdent si 7, 8 ou 9 joueurs se trompent, ce qui, en menant un petit calcul, donne : $(36 \text{ x } 2^7 + 9 \text{ x } 2^8 + 2^9)/3^9 = 37{,}7$ %.

Même si cela vous semble paradoxal, ils peuvent réduire leur risque de perdre à 0, en convenant avant le jeu d'une stratégie astucieuse qui les fera gagner de manière certaine quelle que soit la répartition des chapeaux sur leur tête.

Quelle est cette stratégie ? ■