Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022,
Bât. M3 extension

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université Lille 1 *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : LES DEUX PAIRES DE CHAUSSETTES

Il fait très froid, Lucien a décidé de mettre deux paires de chaussettes : l'une est rouge et l'autre est noire. Elles sont rangées dans son tiroir qui ne contient rien d'autre. Il fait nuit et, pour ne pas déranger, il n'allume pas la lumière. Il met ses chaussettes au hasard. Lucien se demande quelle est la probabilité pour qu'il réussisse du premier coup à mettre ses 4 chaussettes d'une façon convenable (la même couleur visible à droite et à gauche).

Raisonnement 1. Lucien prend une chaussette au hasard, il la met à son pied droit. Il en prend une seconde, il la met à son pied droit par-dessus la première. Tout sera correct à cet instant si la seconde chaussette – prise parmi trois – n'est pas la jumelle de la première. Cela se produira **deux fois sur trois** (car la chaussette jumelle de celle déjà enfilée est l'une des trois qui restent). Ensuite, il met à son pied gauche une troisième chaussette (prise parmi deux différentes). Elle doit être la jumelle de la première de droite, cela se produira **une fois sur deux**. La dernière sera alors nécessairement convenable. En tout, la probabilité de réussir est donc **P = 2/3 x 1/2 = 1/3**.

Raisonnement 2. Lucien prend deux chaussettes au hasard et les met à son pied droit. Il faut qu'elles soient différentes. Les choix possibles sont rouge-rouge, noire-noire, rouge-noire, noire-rouge. Lucien a donc **une chance sur deux** d'enfiler ces deux chaussettes sans s'engager vers une configuration insatisfaisante. Ensuite, il doit mettre les deux autres chaussettes (qui sont de couleurs différentes) dans le bon ordre, et cela donnera quelque chose de convenable **une fois sur deux**. Lucien réussira donc une fois sur quatre. **P = 1/4**

Raisonnement 3. Lucien prend deux chaussettes au hasard et en met une à droite, l'autre à gauche. Pour que cela ne l'engage pas vers une mauvaise configuration, il faut que les deux chaussettes choisies soient de la même couleur. Les possibilités sont rouge-rouge, noire-noire, rouge-noire, noire-rouge. Donc une configuration convenable se produira **une fois sur deux**. Si c'est le cas, les deux autres chaussettes seront aussi convenablement placées. La probabilité de réussir est donc 1/2 : **P = 1/2**.

Voilà qui est étrange et paradoxal : la probabilité de réussir ne peut pas être à la fois 1/4, 1/3 et 1/2.

Quel raisonnement est bon ? Expliquez alors pourquoi les deux autres sont faux. Autre possibilité : ils sont tous bons, car la probabilité de réussir dépend de la procédure qu'on utilise, et la conclusion doit donc être qu'il faut utiliser la troisième méthode puisqu'elle conduit au meilleur résultat.

Solution

Merci et bravo aux lecteurs qui ont découvert la solution et me l'ont fait parvenir. Ce sont, par ordre d'arrivée des réponses, Virginie Delsart, Nicolas Vaneecloo, Thomas Delclite, Jef Van Staeyen, Hervé Louis Moritz, Jean-Baptiste Leroy et Florent Delhaye.

Le raisonnement 1 est le seul correct et la réponse est donc 1/3. Il n'y a pas de raisons que les différentes procédures donnent des résultats différents car elles reviennent toujours à choisir 4 chaussettes et à les enfiler en procédant à des choix uniformes sans utiliser aucune information particulière.
Notons les quatre chaussettes : R1 R2 N1 N2. Les raisonnements 2 et 3 commettent la même erreur qui est la suivante :
- Quand on prend deux chaussettes parmi les quatre, cela revient à prendre deux éléments dans un ensemble qui en comporte 4. Il y a C(4, 2) = 4.3/2 = 6 façons de le faire. On parle de « combinaisons » et leur nombre est donné par les coefficients du binôme qu'on trouve dans le triangle de Pascal. Mais ici pas besoin de connaissances savantes, les six cas équiprobables sont faciles à énumérer :
{R1, R2}, {R1, N1}, {R1, N2}, {R2, N1}, {R2, N2}, {N1, N2}
Il s'agit d'ensembles, l'ordre n'est pas pris en compte.
Il y a donc **une chance sur trois** pour que, lorsque l'on prend deux chaussettes parmi les 4, il y en ait deux de la même couleur, et non pas **une chance sur deux** comme c'est proposé dans les raisonnements 2 et 3 qui se trompent en énumérant les cas comme s'il s'agissait de tirages successifs à pile ou face, ou de tirages avec remises. Si vous doutez de ce 1/3, faites une expérience : 20 fois de suite, choisissez deux chaussettes parmi 4 en fermant les yeux, puis faites le compte. Environs une fois sur trois – donc environ 7 fois – vous aurez choisi deux chaussettes de même couleur.

Le raisonnement 2 est donc faux, il faut y remplacer le premier 1/2 par 2/3 ce qui conduit finalement à P = 1/3, comme avec le raisonnement 1.
Le raisonnement 3 est faux pour la même raison et il faut remplacer le 1/2 par 1/3, ce qui conduit à 1/3.
Les trois raisonnements donnent donc la même probabilité : P = 1/3.

Si vous avez encore des doutes, voici une quatrième méthode.

Les diverses façons de placer les chaussettes sont au nombre de 24, car il y a 4 x 3 x 2 x 1 = 24 façons d'ordonner un ensemble à 4 éléments. Les voilà en convenant d'indiquer, dans l'ordre, la chaussette mise en premier au pied droit, la chaussette mise en second au pied droit, la chaussette mise en premier au pied gauche, la chaussette mise en second au pied gauche :

R1-R2-N1-N2	R1-R2-N2-N1	R2-R1-N1-N2	R2-R1-N2-N1
N1-N2-R1-R2	N1-N2-R2-R1	N2-N1-R1-R2	N2-N1-R2-R1
R1-N1-R2-N2	R1-N2-R2-N1	R2-N1-R1-N2	R2-N2-R1-N1
N1-R1-N2-R2	N1-R2-N2-R1	N2-R1-N1-R2	N2-R2-N1-R1
N1-R1-R2-N2	N1-R2-R1-N2	N2-R1-R2-N1	N2-R2-R1-N1
R1-N1-N2-R2	R1-N2-N1-R2	R2-N1-N2-R1	R2-N2-N1-R1

Les configurations satisfaisantes sont celles de la forme : N-R-N-R et R-N-R-N qui sont 8 parmi les 24, ce qui conduit à nouveau à P = 1/3.

NOUVEAU PARADOXE : S'OPPOSER AU HASARD DES NAISSANCES ?

Dans un pays lointain, les femmes ont des enfants qui sont de sexe masculin dans 50 % des cas exactement et, bien sûr, de sexe féminin dans 50 % des cas. Aucun biais d'aucune sorte n'a jamais été observé chez aucune femme ou catégorie de femmes. Autrement dit, tout se passe comme si le sexe d'un enfant à naître était tiré au hasard avec une pièce de monnaie non truquée. Le gouvernement décide que seuls les couples ayant eu au moins une fille toucheront leur retraite. En réaction à cette mesure, chaque couple adopte alors la stratégie suivante :
- si leur premier enfant est une fille, il n'en a pas d'autres ;
- si le premier enfant est un garçon, le couple a un second enfant qui sera le dernier si c'est une fille ;
- et ainsi de suite, chaque couple ayant des enfants jusqu'à avoir une fille qui est alors leur dernier enfant.

Cette stratégie a en particulier deux conséquences :
- (a) il n'y a aucune famille sans fille ;
- (b) une famille sur deux n'a pas de garçon.

Cela favorise donc clairement les filles. Pourtant, au bout de quelques années, lorsque le ministère des statistiques évalue le rapport [nombre de filles]/[nombre de garçons] depuis que la mesure a été adoptée, il trouve qu'à très peu de chose près il y a eu autant de garçons que de filles. Comment expliquer ce paradoxe ?