Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022, Bât. M3

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université Lille 1 *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : LES CHAPEAUX ALIGNÉS

Rappel de l'énoncé

Des étudiants en logique au nombre de N sont soumis à un test. On leur explique qu'on va les aligner les uns derrière les autres, tous tournés vers la droite. On posera sur leur tête un chapeau rouge ou bleu tiré au hasard. L'étudiant le plus à gauche pourra voir tous les chapeaux sauf le sien ; celui placé devant lui pourra voir tous les chapeaux sauf le sien et celui de l'étudiant placé derrière lui. Plus généralement, l'étudiant placé en position k, à partir de la gauche, pourra voir tous les chapeaux des étudiants k+1, k+2, etc. jusqu'au dernier le plus à droite, mais aucun autre. On interrogera chaque étudiant sur la couleur du chapeau qu'il a sur la tête et on leur distribuera ensuite autant d'ordinateurs portables qu'ils auront donné de bonnes réponses. On précise encore qu'avant de se mettre en rang les étudiants sont autorisés à discuter entre eux pour convenir d'une stratégie de réponses, mais qu'une fois alignés les chapeaux seront placés au hasard et qu'ils ne pourront plus avoir d'échanges. Dernière précision : on interrogera les étudiants à voie haute et ils répondront, à voie haute, sur ce que chacun croit être la couleur de son chapeau, en commençant par l'étudiant le plus à gauche et en terminant par celui le plus à droite.
L'étudiant Alonso dit : « nous pouvons être certains de gagner un ordinateur chacun, sauf peut-être l'un de nous ».
Il semble impossible que les N étudiants puissent gagner de manière certaine N-1 ordinateurs et peut-être N ! Pourtant, Alonso est un très bon étudiant qui ne se trompe jamais. Quelle est l'idée d'Alonso ?

Solution

Merci aux personnes qui m'ont envoyé la bonne solution. Dans l'ordre de réception des réponses, il s'agit de : Patrice Cacciani, Ludovic Thuinet, Virginie Delsart, Nicolas Vaneecloo, Bernard Barbez, Daniel Liabeuf, André Pillons, Bernard Dupont, Julien Destombes, Fabrice Descamps, Jef Van Staeyen, Florent Delhaye, Frédéric Bernable.

La solution se fonde sur la transmission d'étudiant en étudiant de l'information sur la parité (pair ou impair) du nombre de chapeaux rouges placés à partir de lui (en comptant son chapeau). Plus précisément :

- L'étudiant 1 (le plus à gauche) indique *rouge* pour son chapeau si le nombre de chapeaux *rouges* qu'il voit est pair et il indique *bleu* sinon. Il a une chance sur deux de gagner.

- L'étudiant 2, s'il voit devant lui un nombre de chapeaux *rouges* qui à la même parité que le nombre de chapeaux rouges qu'a vu l'étudiant 1 (ce qu'il sait puisqu'il a entendu la réponse de l'étudiant 1), est certain d'avoir sur la tête un chapeau bleu, et sinon, d'avoir sur la tête un chapeau rouge. Il répond conformément à sa déduction et ne peut pas se tromper.

- L'étudiant 3, qui connaît la parité du nombre de chapeaux rouges parmi les chapeaux 2, 3, ..., k), et qui sait si l'étudiant 2 à un chapeau rouge ou pas (car il a entendu sa réponse), connaît donc la parité du nombre de chapeaux rouges des étudiants des rangs 3 à N. Comme il voit aussi tous les chapeaux des rangs 4 à N, il en déduit la couleur de son chapeau.

- De proche en proche, tous les étudiants du deuxième jusqu'au dernier donnent la bonne couleur pour leur chapeau. Au total, tous, sauf peut-être le premier, devinent correctement la couleur de leur chapeau. Le premier a seulement une chance sur deux d'avoir bon.

En résumé :
- Une fois sur deux, les étudiants emporteront N ordinateurs,
- Et une fois sur deux, ils en emporteront N-1.


La Parabole des aveugles - Pieter Brueghel l'Ancien, Pieter Brueghel le Jeune (Brueghel d'Enfer) - vers 1630

NOUVEAU PARADOXE : LE CONGRÈS DES MYOPES

Il s'agit à nouveau d'un problème de chapeaux. Le congrès annuel des myopes se réunit. Un jeu est organisé avec 11 des congressistes. Après quelques minutes de discussion, pendant lesquelles les 11 myopes ont pu convenir de la stratégie qu'ils allaient utiliser, l'arbitre du jeu pose un chapeau noir ou rouge sur la tête de chacun et dispose les joueurs en cercle de telle façon que :

- Le myope 1 voit le chapeau du myope 11 et lui seulement ;
- Le myope 2 voit le chapeau du myope 1 et lui seulement ;
- Le myope 3 voit le chapeau du myope 2 et lui seulement ;
- ...
- Le myope 11 voit le chapeau du myope 10 et lui seulement.

Simultanément, chacun des 11 myopes indique la couleur du chapeau qu'il pense porter. Il a été convenu que l'ensemble des 11 joueurs gagnait le droit de revenir gratuitement au congrès l'année suivante si l'un d'eux au moins donnait la bonne réponse.
En répondant au hasard, ils ont peu de chance de perdre, mais l'arbitre a pu les espionner pendant qu'ils parlaient avant l'épreuve et il est possible qu'il exploite ce qu'il a entendu pour les faire perdre. Pourtant, même dans un tel cas, les 11 joueurs sont certains de gagner. Quelle stratégie ont-ils convenu qui assure à 100 % que l'un d'eux (au moins) proposera la bonne couleur pour le chapeau qu'il porte ?
L'existence d'une telle stratégie peut vous sembler paradoxale (puisque l'arbitre fait ce qu'il veut et qu'il a entendu la discussion des 11 myopes), pourtant elle ne l'est pas et en recherchant un peu vous la découvrirez.

Plus étonnant, et maintenant on est encore plus proche d'un paradoxe, j'attends des lecteurs qu'ils résolvent un second problème :
- Prouvez que si l'un des myopes est en réalité un aveugle, alors cette fois aucune stratégie convenue à l'avance ne peut fonctionner dans 100 % des cas. Notez bien que, comme précédemment, on ne demande aux joueurs que de s'arranger pour qu'au moins l'un d'eux devine correctement la couleur du chapeau qu'il porte.
Cette seconde partie du problème consiste à démontrer ce qu'on nomme un « résultat négatif ». L'histoire des mathématiques en compte de nombreux : la démonstration découverte par les savants grecs que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel (c'est-à-dire qu'il n'existe pas deux entiers p et q, tels que $\sqrt{2} = p/q$) est sans doute le premier résultat de ce type. Ici, il faut démontrer qu'aucune stratégie de jeu n'est possible si la ronde des 11 personnages est composée de 10 myopes et 1 aveugle.