Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022, Bât. M3

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université Lille 1 *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : DES SILENCES QUI EN DISENT LONG

Rappel de l'énoncé

On choisit cinq nombres a, b, c, d et e tels que : $1 \leq a < b < c < d < e \leq 10$. Autrement dit : les cinq nombres sont compris entre 1 et 10, tous différents et classés par ordre croissant. On indique leur produit P à Patricia, leur somme S à Sylvie, la somme de leurs carrés $C = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ à Christian et la valeur $V = (a + b + c)(d + e)$ à Vincent. Ils doivent deviner quels sont les nombres a, b, c, d et e.
1 - Une heure après qu'on leur a posé le problème, les quatre personnages qu'on interroge simultanément répondent tous ensemble : « je ne connais pas les nombres a, b, c, d et e ».
2 - Une heure après, les quatre personnages qu'on interroge à nouveau répondent encore tous ensemble : « je ne connais pas les nombres a, b, c, d, et e ».
Etc.
23 - Une heure après (soit 23 heures après la formulation de l'énoncé !), les quatre personnages qu'on interroge à nouveau répondent encore tous ensemble : « je ne connais pas les nombres a, b, c, d et e ».
Cependant, après cette 23ème réponse, les visages des quatre personnages s'éclairent d'un large sourire et tous s'exclament : « maintenant, je connais a, b, c, d et e ». Vous en savez assez pour deviner les 5 nombres a b c d e ?

Solution

Assez étrangement, ce problème, qui est le plus difficile de tous ceux qui ont été proposés dans cette rubrique, a intéressé un grand nombre de lecteurs qui ont tous découvert la bonne solution, parfois à la suite d'un long travail. Les premières réponses reçues sont, dans l'ordre, celles de : Virginie Delsart, Nicolas Vaneecloo, Patrice Cacciani, Michel Damiens, Jean-François Colonna, Nicolas Berger, Clément Théry, Chantal Enguehard, Julien Destombes, Jeff van Straeyen et Florent Cordellier.

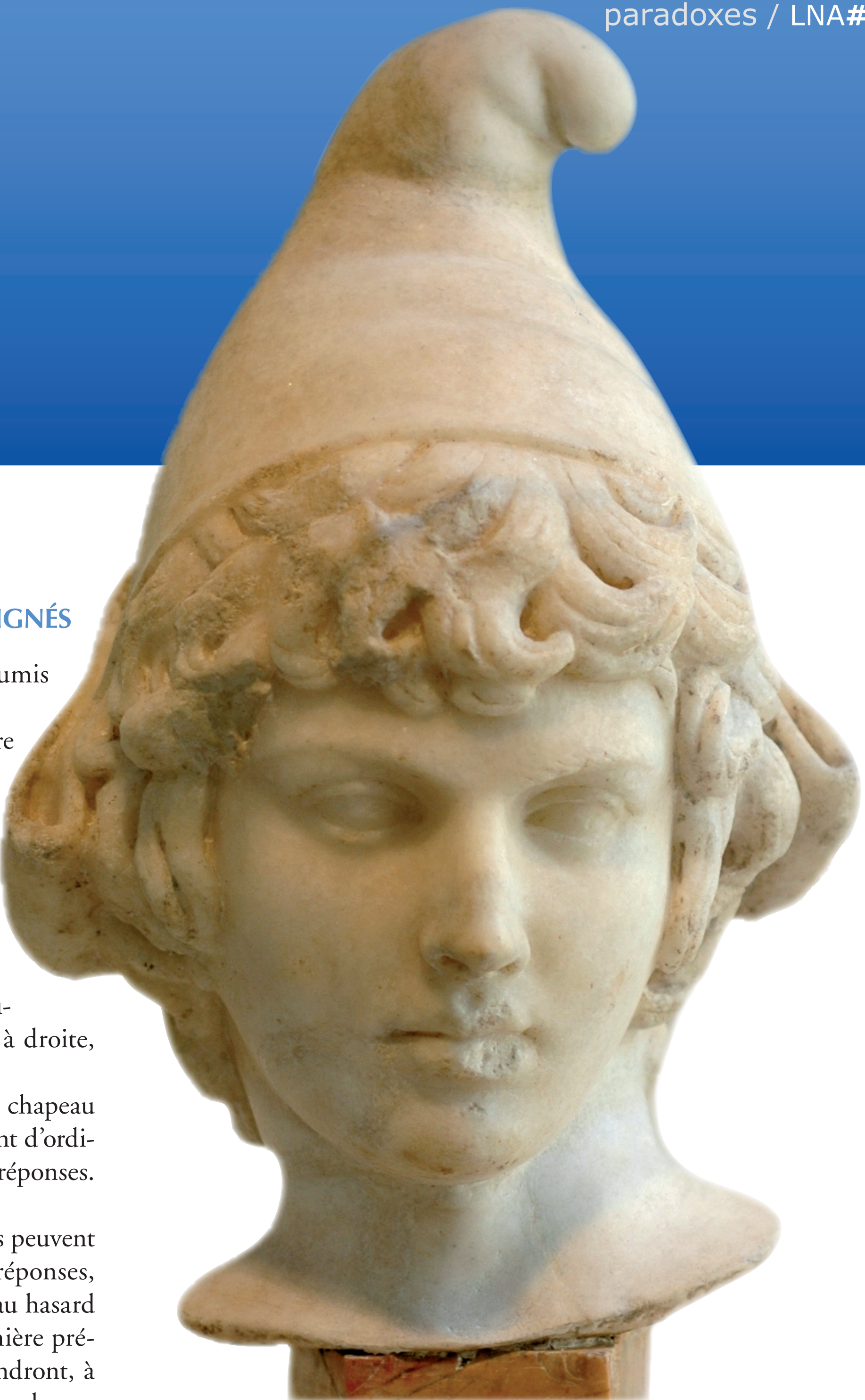
Voici le raisonnement qui donne la solution que nous présentons sans recopier tous les détails des calculs car cela occuperait quatre pages.

Il y a, au départ, 252 quintuplets (a, b, c, d, e) possibles. Certains d'entre eux donnent une somme S qui permettrait de retrouver (a, b, c, d, e). C'est le cas, par exemple, si $S = 15$ car $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ est la plus petite somme possible et oblige donc à avoir $a = 1$ $b = 2$ $c = 3$ $d = 4$ $e = 5$. Le fait que Sylvie ait indiqué, au point 1, qu'elle ignorait (a, b, c, d, e) signifie que le quintuplet (1, 2, 3, 4, 5) n'est pas le bon. C'est vrai pour d'autres sommes. De même, certains produits ne peuvent être obtenus qu'une fois et doivent être éliminés après l'étape 1. De même, encore, pour C et V. Un long calcul à la main, ou en utilisant un ordinateur, montre que l'élimination de ces quintuplets fait passer les 252 possibilités initiales à 140. Les quatre personnages mènent ce raisonnement d'élimination pendant l'heure qui suit l'énoncé du problème. À partir de ces 140 possibilités pour (a, b, c, d, e), chaque personnage peut donc à nouveau raisonner comme précédemment. Si Sylvie indique qu'elle ne peut pas trouver (a, b, c, d, e) lors de l'étape 2, c'est que les S n'apparaissant qu'une fois dans la liste des 140 possibilités peuvent être éliminées. De même pour les P, C et V. On arrive alors à 100 quintuplets possibles.

La réduction des solutions donne, petit à petit, des quintuplets candidats de moins en moins nombreux : on en obtient successivement 85, 73, 64, 62, 60, 57, 54, 50, 47, 44, 40, 36, 33, 31, 28, 24, 19, 13, 8, 4. La prise en compte de l'étape 23 conduit à une solution unique. À cet instant, tout le monde – et en particulier vous – sait que : $S = 28$, $P = 3360$, $C = 178$, $V = 195$ et donc que :
$a = 2$, $b = 5$, $c = 6$, $d = 7$, $e = 8$.

NOUVEAU PARADOXE : LES CHAPEAUX ALIGNÉS

Des étudiants en logique au nombre de N sont soumis à un test.
On leur explique qu'on va les aligner les uns derrière les autres, tous tournés vers la droite. On posera sur leur tête un chapeau rouge ou bleu tiré au hasard. L'étudiant le plus à gauche pourra voir tous les chapeaux sauf le sien ; celui placé devant lui pourra voir tous les chapeaux sauf le sien et celui de l'étudiant placé derrière lui. Plus généralement, l'étudiant placé en position k, à partir de la gauche, pourra voir tous les chapeaux des étudiants k + 1, k + 2, etc. jusqu'au dernier le plus à droite, mais aucun autre.
On interrogera chaque étudiant sur la couleur du chapeau qu'il a sur la tête et on leur distribuera ensuite autant d'ordinateurs portables qu'ils auront donné de bonnes réponses. Ils s'arrangeront pour se les répartir.
On précise encore qu'avant de se mettre en rang ils peuvent discuter entre eux et convenir d'un système de réponses, mais qu'une fois aligné les chapeaux seront placés au hasard et qu'ils ne pourront plus avoir d'échanges. Dernière précision : on les interrogera à voie haute et ils répondront, à voie haute, sur ce que chacun croit être la couleur de son chapeau, en commençant par l'étudiant le plus à gauche et en terminant par celui le plus à droite.
Analysons un instant le problème qui est soumis aux étudiants.
En répondant au hasard, ils gagneront en moyenne N/2 ordinateurs car une réponse sur deux au hasard sera juste à peu près.
Les étudiants peuvent obtenir bien mieux s'ils conviennent entre eux de la méthode de jeu suivante :
- l'étudiant 1 (le plus à gauche) répondra en donnant la couleur du chapeau de l'étudiant 2, qui connaîtra donc de manière certaine la couleur de son chapeau ;
- l'étudiant 2 répétera ce que l'étudiant 1 aura proposé (et gagnera donc) ;
- l'étudiant 3 répondra en donnant la couleur du chapeau de l'étudiant 4 (qui connaîtra donc de manière certaine la couleur de son chapeau) ;
- l'étudiant 4 répétera ce que l'étudiant 3 aura proposé (et gagnera donc) ;
- etc.


Buste d'Attis portant le bonnet phrygien, marbre de Paros, IIème siècle ap. J.-C.

Cette façon de procéder assure les étudiants d'avoir au moins N/2 réponses exactes et, en moyenne, d'en avoir 3N/4 (car les étudiants de rang impair tomberont juste une fois sur deux environ).
C'est très bien, se disent les étudiants qui s'apprêtent à adopter cette tactique de jeu. Pourtant, l'un d'eux, Alonso, les arrête et dit :
- « Non, j'ai une autre idée, nous pouvons être certains de gagner un ordinateur chacun, sauf peut-être l'un de nous ».
Il semble impossible que les N étudiants puissent gagner de manière certaine N - 1 ordinateurs et peut-être N ! Pourtant, Alonso est un très bon étudiant qui ne se trompe jamais. Quelle est donc l'idée d'Alonso ?