Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

* Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022, Bât. M3

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille *

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : UN CALCUL RÉVOLUTIONNAIRE

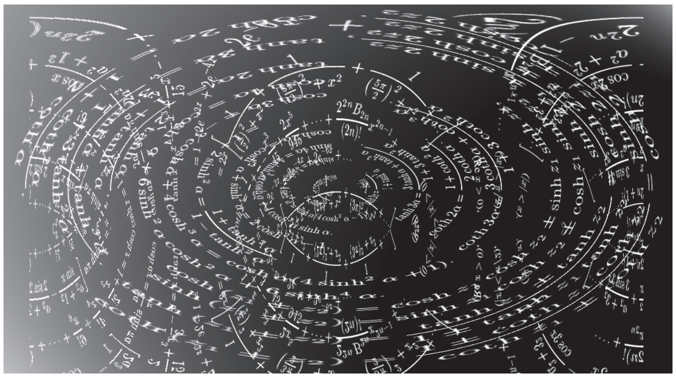
Rappel de l'énoncé

Calculer la racine carrée d'un nombre n de 80 chiffres n'est pas très simple, même si on sait que l'entier n est un carré parfait ($n = m^2$). Calculer la racine treizième d'un nombre n de 100 chiffres est encore plus compliqué, même si on sait que n est une puissance treizième exacte d'entier ($n = m^{13}$). C'est même certainement impossible de tête. Que penser alors du calcul de la racine 1789-ème d'un nombre n de 7000 chiffres, même en sachant que n est une puissance 1789-ème exacte ($n = m^{1789}$). Réussir un tel calcul de tête constituerait une révolution !
Le troisième exercice est pourtant le plus simple. Le second calcul est difficile sans papier, mais quelques amateurs de calcul mental en sont capables. Le premier exercice, lui, n'est, semble-t-il, pas humainement possible de tête : même les plus grands calculateurs prodiges de l'histoire n'ont jamais réussi l'extraction de la racine carrée de nombres de 80 chiffres. Ce qui semble le plus difficile, à première vue, est en réalité le plus facile : c'est le *paradoxe de la fausse difficulté.*
Vous devez expliquer pourquoi il en est ainsi, et découvrir la méthode permettant de calculer la racine 1789-ème d'un nombre de 7000 chiffres.
Si vous trouvez cela trop compliqué, attaquez-vous d'abord au paradoxe lexical suivant. Pourquoi est-il faux que la racine treizième du nombre a est le nombre b qui, multiplié treize fois par lui-même, donne a ?

Solution

Merci à Éric Wegrzynowski, Henri Bocquet, Nicolas Decock et Jef van Staeyen qui m'ont fait parvenir leurs solutions au paradoxe.

La racine treizième du nombre a est le nombre b qui, élevé à la puissance treize, donne a, et donc... c'est le nombre qui, multiplié *douze* fois par lui-même, donne a.
Précisons bien que, dans les exercices mentionnés, on sait que le résultat recherché est un entier. Cela signifie que le nombre qu'on vous soumet – de 80 chiffres pour la racine carrée, de 100 chiffres pour la racine treizième, de 7000 chiffres pour la racine 1789-ème – est la puissance exacte d'un nombre entier.
La difficulté du problème dépend de la taille du nombre que vous devez retrouver, car c'est la quantité d'informations manquantes. La difficulté ne dépend donc pas de la longueur des données, comme on est tenté de le croire. Elle n'est pas non plus dans le fait de rechercher la racine k-ème pour un k élevé. Nous allons voir que la taille du nombre m à trouver va en décroissant d'un exercice à l'autre et que c'est donc bien le troisième exercice qui est le plus facile.
Commençons par lui : comment calculer la racine 1789-ème d'un nombre de 7000 chiffres ? Un petit calcul algébrique ou un petit travail d'exploration, aidé d'un ordinateur, montre que les seuls nombres entiers qui, élevés à la puissance 1789, donnent des entiers ayant exactement 7000 chiffres sont :
8171, 8172, 8173, 8174, 8175, 8176, 8177, 8178, 8179, 8180.
Les nombres inférieurs à 8171 ont une puissance 1789-ème possédant moins de 7000 chiffres. Les nombres au-delà de 8180 ont une puissance 1789-ème possédant plus de 7000 chiffres.
De plus, si vous élevez 0, 1, 2, ..., 9 à la puissance 1789, vous constaterez que le dernier chiffre des résultats est, dans le même ordre, 0, 1, 2, ..., 9. Il en résulte immédiatement qu'en élevant à la puissance 1789 un nombre se terminant par le chiffre i, on trouve un nombre qui se termine encore par le chiffre i : le dernier chiffre d'un entier élevé à la puissance 1789 se conserve. (Plus généralement on montre que tout nombre entier, élevé à une puissance de la forme $4n + 1$, garde le même dernier chiffre en base 10.)
Pour calculer la racine 1789-ème d'un nombre de 7000 chiffres, il suffit donc de regarder le dernier des 7000 chiffres et de repérer sur la liste [8171, 8172, 8173, 8174, 8175, 8176, 8177, 8178, 8179, 8180] le nombre qui a le même dernier chiffre. Apprendre cette liste est à la portée de tout le monde, et donc tout le monde peut, de tête, extraire la racine 1789-ème d'un nombre de 7000 chiffres !
Considérons maintenant le problème de l'extraction d'une racine treizième d'un nombre de 100 chiffres. L'ordinateur vous indique que si un nombre, élevé à la puissance 13, pos-



sède 100 chiffres, alors il est compris entre les deux nombres suivants :

41246264 49238826

Si un nombre de 100 chiffres est une puissance treizième exacte, vous savez donc, sans même le regarder, qu'il commence par un 4. De plus, élever à la puissance treize ne change pas le dernier chiffre (comme pour la puissance 1789). Le travail nécessaire pour trouver la racine 13-ème d'un nombre de 100 chiffres consiste donc à déterminer les 6 chiffres manquants entre le 4 du début et le dernier chiffre facile à trouver. Quelques astuces arithmétiques rendent cela possible et ceux qui les connaissent et s'entraînent un peu n'ont besoin que de quelques minutes ou même de quelques secondes pour réaliser l'extraction de la racine treizième de nombres de 100 chiffres. L'exploit demande de l'entraînement et peut-être même un don particulier en calcul mental, mais ce n'est pas un exploit fantastique. Il a été réalisé entre autres par Herbert de Grote, Wikhelm Klein, Gert Mittring et Alexis Lemaire. Ceux qui le pratiquent en se présentant comme des génies mathématiques exploitent l'ignorance du public qui, en général, ne comprend pas très bien ce qu'est une racine treizième et encore moins la facilité qu'introduit le fait que les nombres proposés soient des puissances exactes.

Alexis Lemaire – parfois présenté comme le plus grand calculateur de tous les temps – est capable de mieux que l'extraction des racines treizièmes de nombres de 100 chiffres : il pratique l'extraction des racines treizièmes de nombres de 200 chiffres. Précisons cependant qu'il réalise cette extraction pour certains nombres et pas pour tous – sans doute parce que les astuces qu'il met en œuvre ne sont pas assez générales – et qu'il est totalement incapable d'extraire la racine treizième d'un nombre de 201 chiffres ou même de 199 chiffres ! Dans la mesure où on ne connaît pas les algorithmes utilisés par Alexis Lemaire, il est impossible de savoir s'il réalise vraiment un exploit exceptionnel de calcul mental où s'il met en œuvre une recette que d'autres pourraient appliquer.

Les media qui en parlent semblent victimes du *paradoxe de la fausse difficulté* et l'on peut être certain qu'ils seraient encore plus émerveillés et épatés par le génie qui réussirait le calcul *révolutionnaire* consistant à extraire la racine 1789-ème d'un nombre de 7000 chiffres…, calcul que pourtant tout le monde peut effectuer.

Le premier exercice (extraire la racine carrée d'un nombre de 80 chiffres) est le plus difficile des trois exercices proposés. Le calcul demande en effet de retrouver 40 chiffres inconnus. Le grand mathématicien John Wallis (1616-1703) pouvait, semble-t-il, extraire la racine carrée de nombres de 55 chiffres. Zacharias Dase (1824-1861) pouvait extraire la racine carrée d'un nombre de 60 chiffres. Il réussit aussi l'exploit de multiplier de tête deux nombres de 100 chiffres l'un par l'autre... en 8 heures 45 minutes. À ma connaissance, personne n'a jamais pu extraire de tête les racines carrées des nombres de 80 chiffres.

NOUVEAU PARADOXE : UNE TROUBLANTE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Un théorème important de l'algèbre indique qu'une équation polynomiale de degré n (n entier ≥ 1) à coefficients réels possède au plus n solutions : une équation de degré 1 possède au plus une solution ; une équation de degré 2 possède au plus deux solutions, etc.

(Si, à la place de considérer des nombres réels, on considère des nombres complexes – pour les coefficients et pour les solutions – et si on prend en compte la multiplicité des racines, le *théorème fondamental de l'algèbre* indique alors que toute équation polynomiale de degré n possède exactement n solutions.)

Dans le cas réel qui seul nous concernera ici, une équation de degré 2 possède donc au plus 2 solutions différentes.

Souvenez-vous, pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, les racines sont données par :

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad x_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a \quad x_2 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a$$

Pourtant, voici une exception à cette règle. Considérons trois nombres réels *a*, *b* et *c* fixés et deux à deux distincts (si vous le souhaitez, prenez $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$). Analysons l'équation suivante :

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1$$

C'est une équation de degré 2 en l'inconnue *x* car c'est une somme, chaque terme étant un polynôme de degré 2.

Le nombre *a* est solution de l'équation car, quand on remplace *x* par *a*, le premier terme s'annule, de même que le troisième, alors que le second prend la valeur 1. Notons qu'aucun dénominateur ne s'annule, nous respectons bien les règles de calcul qu'impose ce genre de manipulations.

Le nombre *b* et le nombre *c*, pour des raisons analogues, sont aussi solutions de cette équation qui possède donc trois solutions. Puisque *a*, *b* et *c* ont été supposés distincts, nous avons donc une équation du degré 2 possédant 3 solutions différentes.

Est-ce la trace d'un paradoxe au cœur de l'algèbre élémentaire, et faut-il entreprendre le rappel des millions de livres de mathématiques qui mentionnent l'énoncé du théorème fondamental de l'algèbre ?