Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille *

* Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022, Bât. M3

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : LES VENDREDIS 13

Rappel de l'énoncé

La fréquence des *vendredis 13* mérite d'être étudiée avec soin. Le bon sens souffle qu'il n'y a aucune raison pour que le 13 d'un mois soit plus souvent un vendredi qu'un lundi ou que n'importe quel autre jour de la semaine.

Une règle de 3 conduit à l'affirmation que « le 13 d'un mois est un vendredi une fois tous les sept mois en moyenne » et, qu'en conséquence, leur fréquence par an est de 12/7, c'est-à-dire 1,7142857.

C'est faux ! Il y a plus de vendredis 13 que de lundis 13, de mardis 13, de mercredis 13, de jeudis 13, de samedis 13 et de dimanches 13.

Le nombre moyen de vendredis 13 chaque année est précisément : 1,72 et non pas 1,7142857.

Saurez-vous expliquer pourquoi ?

Voici un indice : l'explication est liée au fait – paradoxal lui aussi – que le 6 octobre 1582, aucun enfant ne vit le jour en Espagne, au Portugal et en Italie.

Solution

Virginie Delsart et Nicolas Vaneecloo ont trouvé la solution et me l'ont fait parvenir à peine le précédent numéro paru : bravo. Jef van Staeyen a aussi trouvé la solution en faisant un calcul à la main.

L'explication de ce paradoxe du calendrier demande un peu d'attention et un retour en arrière dans le temps. Comme vous le savez sans doute, le calendrier Julien (du nom de Jules César), qu'on utilisait en Europe jusqu'en 1592, avait le défaut de proposer trop d'années bissextiles. Dans ce calendrier, les années bissextiles sont toutes les années multiples de 4. Ce trop grand nombre d'années bissextiles avait créé un décalage entre l'année officielle et l'année véritable (et donc les saisons), ce qui finissait par être gênant. Le pape Grégoire XIII, conseillé par le savant Aloysius Lilus, imagina donc de modifier la règle des années bissextiles. Dans le nouveau calendrier Grégorien qu'il promulgua, la règle est :

- une année est bissextile si c'est un multiple de 4 qui n'est pas un multiple de 100, à l'exception des années multiples de 400 qui restent bissextiles.

Il en résulte par exemple que 1900 et 2100 ne sont pas bissextiles, mais que 2000 l'est.

Pour le démarrage du nouveau calendrier, on remit l'année officielle en phase avec les saisons et il fut donc décrété que l'on passerait directement du 4 octobre 1582 au 15 octobre 1582. En Espagne, au Portugal et en Italie, qui suivirent la réforme de Grégoire XIII, il n'y eu donc aucune naissance le 5 octobre 1582, et il n'y en eu pas plus d'ailleurs durant toute la période du 6 au 14 octobre de la même année qui, en quelque sorte, n'existe pas.

Le calendrier Grégorien possède une caractéristique remarquable : il est périodique. Précisément tous les 400 ans, il recommence exactement selon la même séquence, de jours, de semaines et de mois. La raison en est simple : le nombre de jours dans une période de 400 ans est un multiple de 7. Montrons-le.

Le nombre d'années bissextiles en 400 ans est 100 - 3 = 97. En 400 ans, le nombre de jours est donc 97 x 366 + 303 x 365 = 35502 + 110595 = 146097 = 20871 x 7. Il y a donc exactement 20871 semaines dans une période de 400 ans du calendrier Grégorien.

Pour savoir si le vendredi 13 est plus fréquent que le lundi 13 ou un autre jour, il faut donc parcourir les 400 années d'un cycle du calendrier Grégorien et faire le compte. L'information que le 1er janvier 2000 est un samedi est utile pour ce calcul.

Un programme d'ordinateur de quelques lignes (ou un patient calcul à la main) conduit au résultat suivant. Lors du déroulement d'une période de 400 ans du calendrier Grégorien :

le nombre de lundis 13 est 685
le nombre de mardis 13 est 685
le nombre de mercredis 13 est 687
le nombre de jeudis 13 est 684
le nombre de vendredis 13 est 688
le nombre de samedis 13 est 684
le nombre de dimanches 13 est 687

(Le total 685 + 685 + 687 + 684 + 688 + 684 + 687 vaut 4800, ce qui est bien le nombre de mois nécessaires pour faire 400 ans.)

Les vendredis 13 sont donc bien les plus fréquents !

Note : concernant les jours supprimés, l'histoire est un peu compliquée car l'adoption du calendrier Grégorien ne fut pas simultanée, même en Europe. En France, par exemple, les jours supprimés furent ceux situés entre le dimanche 9 décembre 1582 et le lundi 20 décembre 1582. Dans le Royaume Britannique, le calendrier Grégorien ne fut adopté qu'en 1752. Ce retard obligea à supprimer non plus 10 jours, mais 11, qui furent ceux placés entre le mercredi 2 septembre 1752 et le jeudi 14 septembre 1752.

NOUVEAU PARADOXE : UN CALCUL RÉVOLUTIONNAIRE

- Calculer la racine carrée d'un nombre n de 80 chiffres n'est pas très simple, même si on sait que l'entier n est un carré parfait ($n = m^2$).

- Calculer la racine treizième d'un nombre n de 100 chiffres est encore plus compliqué, même si on sait que n est une puissance treizième exacte d'entier ($n = m^{13}$). C'est même certainement impossible de tête.

- Que penser alors du calcul de la racine 1789-ème d'un nombre n de 7000 chiffres, même en sachant que n est une puissance 1789-ème exacte ($n = m^{1789}$). Réussir un tel calcul de tête constituerait une révolution !

Cela semble paradoxal, mais le troisième exercice est le plus simple : vous pouvez d'ailleurs le faire vous-même.

Le second calcul est difficile sans papier, mais quelques amateurs de calcul mental en sont capables. Le premier exercice, lui, n'est, semble-t-il, pas humainement possible de tête : même les plus grands calculateurs prodiges de l'histoire n'ont jamais réussi l'extraction de la racine carrée de nombres de 80 chiffres.

Ce qui semble le plus difficile à première vue est en réalité le plus facile : c'est le *paradoxe de la fausse difficulté.*

Vous devez expliquer pourquoi il en est ainsi, et découvrir la méthode permettant de calculer la racine 1789-ème d'un nombre de 7000 chiffres.

Si vous trouvez cela trop compliqué, attaquez-vous d'abord au paradoxe lexical suivant. Pourquoi est-il faux que la racine treizième du nombre a est le nombre b qui, multiplié treize fois par lui-même, donne a ?