

Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

*Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022, Bât. M3

Par **Jean-Paul DELAHAYE**

Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille*

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : ACHETER UNE VOITURE AU MEILLEUR PRIX

Rappel de l'énoncé

Vous devez acheter une voiture dans la matinée et vous allez rencontrer successivement deux vendeurs qui vont chacun vous offrir le même modèle de voiture et vous proposer un prix « à prendre ou à laisser ». Vous avez rendez-vous avec le premier vendeur à 10h et, à 10h30, vous devrez soit avoir renoncé à acheter sa voiture, soit avoir fait le chèque pour la somme qu'il vous demande. À 11h, vous rencontrerez le second vendeur. Si vous avez refusé la première voiture, vous achèterez au second vendeur, qui sera peut-être plus cher. Il vous est impossible de connaître à l'avance les offres de prix P1 du premier vendeur et P2 du second vendeur. Vous vous dites :

- « J'ai une chance sur deux de faire le bon choix. En effet, si (a) j'achète au premier vendeur, il se peut que le second soit moins cher mais je ne pourrais pas revenir sur ma décision car mon chèque sera fait, et (b), si je refuse d'acheter au premier, il se peut qu'il soit moins cher, ce que je ne saurai que lorsqu'il sera trop tard et que je serai contraint d'acheter au second vendeur. Il y a une chance sur deux pour que le moins cher soit le premier vendeur et une chance sur deux pour que ce soit le second ; j'ai donc une chance sur deux d'acheter la voiture la moins chère, quoi que je fasse ».

En réalité, il existe une façon de s'y prendre qui garantit de réussir à acheter au meilleur prix avec une probabilité strictement supérieure à 50 %. Cette méthode ne vous assure pas d'acheter toujours au meilleur prix, mais vous permet de le faire plus d'une fois sur deux. Quelle est cette méthode ?

Solution.

Bravo à Virginie Delsart et Nicolas Vaneecloo qui ont magistralement résolu le problème... et sont les seuls à m'avoir fait parvenir une solution.

Voici la méthode :

- Faites l'estimation E de la voiture en cherchant à être le plus raisonnable possible, puis adoptez la stratégie suivante : si le premier vendeur propose un prix inférieur ou égal à E, achetez, sinon achetez au second vendeur.

En adoptant cette méthode, vous achèterez au moins cher des deux vendeurs plus d'une fois sur deux. En effet :

a - Si les deux vendeurs proposent un prix supérieur à E, vous refuserez au premier et vous achèterez au second, qui, dans ce cas, sera une fois sur deux le plus bas.

b - Si les deux vendeurs proposent un prix inférieur à E, vous achèterez au premier, qui à nouveau sera, une fois sur deux exactement, le moins cher.

c - Si l'un des deux vendeurs propose moins que E et l'autre plus, la stratégie assure d'acheter au meilleur prix.

Les deux cas a et b donnent autant de chances de faire le bon choix que le mauvais ; le cas c conduit lui toujours à un bon achat. Comme bien sûr la probabilité du cas c n'est pas nulle, vous avez plus d'une chance sur deux de faire le bon choix.

À vrai dire, ce raisonnement est valable quelle que soit la valeur E fixée à l'avance. Cependant, il est bien clair que, pour rendre plus probable le cas c (qui est celui qui rend favorable la méthode), il vaut mieux choisir E le plus proche possible des valeurs que sont susceptibles de proposer les vendeurs de la voiture convoitée.

Ce raisonnement étonnant conduit bien à faire le bon choix plus d'une fois sur deux, mais, comme vous l'avez noté, il ne dit pas quelle est la valeur précise p de la probabilité de faire le bon choix : il indique seulement que $p > 1/2$.

Cette stratégie paradoxale a été proposée pour la première fois par Thomas Cover dans l'article « Pick the largest number » publié dans le livre « Open Problems in Communication and Computation », Springer-Verlag, New-York, 1987.

NOUVEAU PARADOXE : TRANSMISSION DE PENSÉE ?

Michel, chez qui je passais la soirée samedi dernier, a proposé de nous prouver qu'il disposait de pouvoirs mentaux surnaturels – j'avais auparavant exprimé mon scepticisme concernant la transmission de pensée et les prétendus pouvoirs de suggestion que certaines personnes s'attribuent.

Michel a demandé à trois personnes de prendre une feuille de papier et un crayon. Pierre, Leila et moi avons été volontaires.

Chacun a été invité à écrire un nombre de trois chiffres dont le premier et le dernier chiffre diffèrent l'un de l'autre d'au moins deux unités. Il a prétendu qu'il allait, grâce à son pouvoir de persuasion mentale, nous forcer à entrer en communication entre nous sans que nous échangions le moindre mot.

J'ai choisi le nombre 752. J'ignore quels nombres ont été choisis par Pierre et Leila.

Michel nous a demandé d'inverser l'ordre des chiffres et de soustraire le plus petit des deux nombres de trois chiffres du plus grand. J'ai donc fait la soustraction $752 - 257$, ce qui m'a donné 495. Pierre et Leila de leur côté ont fait un calcul analogue à partir du nombre que chacun avait choisi.

Michel nous a ensuite demandé d'inverser les chiffres du résultat obtenu et d'ajouter cet inverse au résultat précédent. J'ai donc calculé $495 + 594 = 1089$. Pierre et Leila de leur côté ont fait l'opération.

Il nous a alors affirmé que, grâce à son pouvoir mental, il nous avait mis en phase « supra-temporelle » et, pour le prouver, il nous a demandé, à son signal, de lire à voix haute en même temps le résultat de notre calcul. Il nous a fait un signe et Pierre, Leila et moi avons tous les trois en même temps lu :

- mille quatre-vingt-neuf.



Bien sûr, cette histoire est absurde et Michel, pas plus que moi, ne dispose de pouvoirs mentaux particuliers. Mais comment a-t-il fait pour nous forcer à trouver tous les trois le résultat 1089 ?