

Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

*Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022, Bât. M3

Par **Jean-Paul DELAHAYE**

Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille*

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

Le paradoxe précédent :
« mais qu'ai-je donc fait d'interdit ? »

Rappel de l'énoncé

Considérons l'équation :

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$$

Il est facile de voir qu'elle possède une solution.
L'équation peut s'écrire :

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

ou encore :

$$\frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}$$

Les numérateurs étant égaux, les dénominateurs le sont aussi. Donc :

$$7-x = 13-x$$

En simplifiant par x – c'est-à-dire en ajoutant x la solution de l'équation de départ de chaque côté de l'égalité – on obtient :

$$7 = 13$$

Où est l'erreur ?

Solution

Nous avons utilisé la règle de simplification suivante :

- Si deux fractions ayant le même numérateur a/b et a/c sont égales, alors les dénominateurs sont égaux $b = c$.

Revoyons la démonstration de cette règle qui semble évidente. On part de :

$$a/b = a/c$$

On multiplie par $1/a$ de chaque côté de l'égalité. Cela donne

$$1/b = 1/c$$

On utilise alors la règle selon laquelle deux nombres qui possèdent le même inverse sont égaux, et donc : $b = c$.

Dans le raisonnement, on multiplie par $1/a$, ce qui suppose

que a est différent de 0. La règle doit donc être énoncée sous la forme précise :

- Si deux fractions ayant le même numérateur a/b et a/c avec $a \neq 0$ sont égales, alors les dénominateurs sont égaux $b = c$. Dans notre calcul paradoxal, avons-nous vraiment $a \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 10$?

Justement non ! Par définition, x est la solution de l'équation :

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$$

Calculons-la. En réduisant au même dénominateur, et en simplifiant, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}(x+5-5(x-7))(13-x) &= (4x-40)(x-7) \\ (4x-40)(13-x) &= (4x-40)(x-7) \\ 4(x-10)(13-x+7) &= 0 \\ 8(x-10)(10-x) &= 0\end{aligned}$$

La solution (et il n'y en a qu'une) est $x = 10$. Nous avons donc appliqué la règle indiquée au-dessus dans un cas illicite.

Nouveau paradoxe : jetons noirs et jetons blancs

Les pions du jeu d'Othello sont au nombre de 64 et possèdent chacun une face blanche et une face noire. On les étale devant le *Grand logicien fou* en les disposant de telle sorte que 10 pions montrent leur côté blanc, et 54 leur côté noir. Le *Grand logicien fou* annonce :

- « Vous allez me bander les yeux, mélanger les pions (sans en retourner) ; ensuite je manipulerai les pions et j'en ferai deux paquets A et B. Vous pourrez alors constater qu'il y aura le même nombre de pions noirs dans le paquet A et dans le paquet B ».

Cela semble totalement absurde : si les pions sont mélangés, le *Grand logicien fou* ne peut pas savoir où sont les pions montrant leur côté noir, et donc le partage qu'il prétend pouvoir faire est impossible.

Pourtant, on lui bande les yeux, il manipule les pions et compose deux paquets ayant chacun le même nombre de pions noirs.

Comment fait-il ? À vous de réfléchir et de résoudre ce qui apparaît comme un paradoxe.

