Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

*Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022, Bât. M3

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille*

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

Rappel du paradoxe précédent : le grand méchant logicien

Une assemblée composée d'un nombre impair de logiciens a été capturée par le *grand méchant logicien* qui veut les enrôler dans sa secte. Il les place en cercle, tous tournés vers le centre, et il dessine sur le front de chacun une croix noire ou rouge en procédant au hasard (il s'aide d'une pièce de monnaie). Chaque logicien voit les croix dessinées sur le front des autres logiciens, mais ne voit pas celle que lui-même porte sur le front. Aucune communication n'est permise entre les logiciens une fois les croix dessinées. Un vote est organisé et chaque logicien indique s'il pense qu'il y a un nombre **pair** de croix rouges au total, ou un nombre **impair** de croix rouges au total. L'abstention n'est pas permise. Le *grand méchant logicien* comptabilise les réponses et considère la **réponse majoritaire** (il y en a une puisque le nombre de logiciens capturés est impair). Si le vote majoritaire est correct, les logiciens sont libérés. Chaque logicien se dit : « Puisque la parité du nombre total de croix rouges dépend de celle que j'ai sur le front, qui a été tirée au hasard, je ne peux rien faire de mieux que voter au hasard. Il en est de même de tous les autres logiciens et donc globalement nous ne pouvons rien espérer de mieux qu'être libéré une fois sur deux ». Ce raisonnement est faux. Il existe une méthode de vote que les logiciens peuvent deviner et appliquer et qui leur permettra d'être libérés dans bien plus de la moitié des cas. Quelle est cette méthode ?

Réponse.
Imaginons que tous les logiciens adoptent la règle suivante. « Si je vois devant moi autant de croix noires que de croix rouges, je vote en faisant l'hypothèse que j'ai sur le front une croix *rouge*. Sinon, je suppose que j'ai sur le front une croix de la couleur majoritairement présente devant moi et je vote conformément à ce qu'il résulte de cette hypothèse. »

Pour analyser l'effet d'une telle méthode, distinguons trois cas.
Cas 1. S'il y a un écart entre le nombre de croix rouges et de croix noires plus grand que 1 (par exemple 6 rouges et 3 noires), alors les logiciens font en majorité dans leur raisonnement une hypothèse correcte et donc trouvent la bonne réponse. Le vote majoritaire est alors correct et les logiciens sont libérés.

Cas 2. Si l'écart entre le nombre de croix rouges et le nombre de croix noires est de 1 en faveur des rouges (par exemple 5 rouges, 4 noires) alors, d'une part, tous les porteurs de croix noires (qui voient plus de rouges que de noires) votent faussement puisqu'ils font l'hypothèse fausse qu'ils portent une croix rouge, et, d'autre part, tous les porteurs de croix rouges, qui voient autant de rouges que de noires, votent correctement (puisque, dans un tel cas, ils font l'hypothèse qu'ils portent une croix rouge). Les rouges étant majoritaires, le vote est donc majoritairement correct et les logiciens sont libérés.

Cas 3. Si l'écart entre le nombre de croix rouges et le nombre de croix noires est de 1 en faveur des noires (par exemple 4 rouges et 5 noires) alors tous les porteurs de croix rouges (qui voient plus de noires que de rouges) votent faussement (ils font une mauvaise hypothèse), ainsi que tous les porteurs de croix noires qui voient autant de rouges que de noires (et qui font injustement l'hypothèse qu'ils portent une croix rouge). Donc le vote est erroné (à 100%). C'est le seul cas où le vote est erroné.
Les cas 2 et 3 se compensent et donc, dans la majorité des situations (grâce au cas 1), les votes des logiciens sont corrects.

Pour évaluer plus précisément le nombre de cas où le vote sera malheureux, considérons le nombre de logiciens **m**. Ce nombre peut s'écrire **m** = 2**n**+1 (car **m** est impair). Le nombre de cas où le vote est incorrect est le nombre de cas où il y a **n** croix rouges et **n** + 1 croix noires. Ce nombre est précisément (2**n** + 1)!/ [**n**! (**n** + 1)!] (nombre de façons de choisir n éléments parmi 2n + 1). Il y a 2^m cas possibles au total (deux façons de peindre le front du premier logicien, deux façons de peindre le front du deuxième logicien, etc.).

Pour m = 3 on trouve : nombre de cas défavorables 3!/[1!2!] = 3 ; nombre de cas total 2^m = 8. Probabilité d'erreur 3/8 = 37,5 %.
Pour m = 5 on trouve : nombre de cas défavorables 5!/[2!3!] = 10 ; nombre de cas total 2^m = 32. Probabilité d'erreur 10/32 = 31,25 %.
Pour m = 7 on trouve : nombre de cas défavorables 7!/[3!4!] = 35 ; nombre de cas total 2^m = 128. Probabilité d'erreur 35/128 = 27,34 %.
Pour m = 9 on trouve : nombre de cas défavorables 9!/[4!5!] =

126 ; nombre de cas total 2^m = 512. Probabilité d'erreur 126/512 = 24,61 %.
Pour m = 15 on trouve : nombre de cas défavorables = 6435 ; nombre de cas total 2^m = 32768. Probabilité d'erreur 6435/32768 = 19,64 %.
Pour m = 25 on trouve : nombre de cas défavorables = 5200300 ; nombre de cas total 2^m = 33554432. Probabilité d'erreur 5200300/33554432 = 15,49 %.
Plus le nombre de logiciens est grand, meilleure est la méthode et l'on montre que, lorsque m tend vers l'infini, le rapport du nombre de cas défavorables sur le nombre total de cas tend vers zéro.

On peut critiquer cette solution en remarquant que les logiciens, s'ils n'ont pas pu s'entendre avant l'épreuve et aussi intelligents soient-ils, n'ont pas de raison d'adopter tous la même stratégie qui donne un rôle particulier au **rouge** par rapport au **noir**. Il est plus raisonnable de penser que la moitié des logiciens à peu près adopte la méthode :
A. « Si je vois devant moi autant de croix noires que de croix rouges, je vote en faisant l'hypothèse que j'ai sur le front une croix **rouge**. Sinon je suppose que j'ai sur le front une croix de la couleur majoritairement présente devant moi et je vote conformément à cette hypothèse. »
et que l'autre moitié à peu près va adopter la méthode symétrique :
B. « Si je vois devant moi autant de croix noires que de croix rouges, je vote en faisant l'hypothèse que j'ai sur le front une croix **noire**. Sinon je suppose que j'ai sur le front une croix de la couleur majoritairement présente devant moi et je vote conformément à cette hypothèse. »
Que se passe-t-il alors ?

Dans le cas 1, rien de changé. Dans le cas 2, cette fois, il suffit qu'un seul porteur de croix rouge joue B plutôt que A pour que le vote majoritaire soit mauvais. Et donc sauf exception, le cas 2 sera défavorable. Le cas 3 est de même défavorable sauf hasard exceptionnel (1 fois sur 2^n).
Par rapport à notre calcul précédent, il faut maintenant doubler le nombre de cas défavorables. Il n'est plus aussi clair que la méthode soit intéressante. Un petit calcul montre cependant que si le nombre de logiciens est supérieur à 7 alors la stratégie décrite est favorable aux logiciens.

Reste une question : pourquoi le raisonnement présenté dans l'énoncé est-il faux ?
La réponse est liée à une remarque que connaissent bien les hommes politiques : quand plusieurs élections ont lieu, pour en gagner la majorité, il n'est pas nécessaire d'avoir plus de voix que l'adversaire, mais d'en avoir un peu plus et qu'elles soient bien réparties. On peut même avoir au total moins de voix que son adversaire et gagner la majorité des élections. Cela s'est vu !

Dans notre histoire, quand on évalue la probabilité de gagner, c'est comme s'il y avait plusieurs votes (un pour chaque tirage au sort de la répartition des croix rouges ou noires) et il est bien exact qu'une fois sur deux la réponse qu'un logicien propose est fausse. Toutefois, cela n'entraîne pas que le vote général est faux une fois sur deux car, lorsque le vote est bon, la majorité est souvent faible alors que, lorsque le vote est mauvais, beaucoup de votants se trompent.

En conclusion, dans une série d'élections, pour gagner une majorité de fois, ce qui est important, ce n'est pas d'avoir la majorité de tous les suffrages qui sont exprimés d'une élection à l'autre, mais d'avoir une majorité de fois la majorité, ce qui est bien différent et est possible même si, en cumulant les résultats de toutes les élections, on est minoritaire.

Nouveau paradoxe : mais qu'ai-je donc fait d'interdit ?

Considérons l'équation :

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$$

Il est facile de voir qu'elle possède une solution.
L'équation peut s'écrire :

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

ou encore :

$$\frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}$$

Les numérateurs étant égaux, les dénominateurs le sont aussi, donc :

$$7 - x = 13 - x$$

En simplifiant par x – c'est-à-dire en ajoutant x, la solution de l'équation de départ de chaque côté de l'égalité – on obtient :

$$7 = 13$$

Qu'est-ce qui ne va pas ?