Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille*

*Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, UMR CNRS 8022, Bât. M3

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

Le paradoxe précédent : l'hôtel paradoxal de Hilbert

Un hôtel infini dont les chambres sont numérotées par les entiers 0, 1, 2, 3, ... est complet pour la nuit. (a) Arrive un client : « pas de problème » lui répond le responsable de l'accueil, « installez-vous dans la chambre 0, je demande au client de la chambre 0 de passer dans la chambre 1, à celui de la chambre 1 de passer dans la chambre 2, etc. » Le nouveau client peut donc être accueilli, et cela sans qu'aucun client ne soit privé de chambre. (b) Dix minutes plus tard, arrive un autocar infini de nouveaux clients qui demandent à passer la nuit dans l'hôtel. « Pas de problème » répond le responsable de l'accueil. Il demande au client de la chambre n de passer dans la chambre 2n. Il indique alors au chauffeur du car que le voyageur numéro i (i = 0, 1, 2, ...) de son autocar peut disposer de la chambre 2i + 1 – qui est effectivement libre puisque toutes les chambres de numéro impair ont été libérées. Chaque nouvel arrivant a trouvé à se caser et aucun de ceux qui occupaient l'hôtel n'a été chassé ! (c) Une demi-heure plus tard arrive un groupe plus important encore, car constitué d'une infinité d'autocars chacun ayant à son bord une infinité de passagers. Le responsable affirme qu'il peut loger tout le monde. Comment fait-il ?

La réponse – proposée par plusieurs lecteurs – consiste à utiliser une bijection entre N l'ensemble des entiers et N x N l'ensemble des pairs de nombres entiers. Très concrètement, le responsable de l'accueil téléphone au client de la chambre i et lui demande de passer dans la chambre 2i + 1 (ce qui libère toutes les chambres ayant un numéro pair) et donne la consigne suivante au responsable du groupe d'autocars : le passager numéro i du bus numéro j doit se rendre dans la chambre 2^{j+1} (2i + 1). En clair :

- Les passagers du bus 0 occupent les chambres 2, 6, 10, 14, 18, ..., 2. (2i + 1), ...
- Les passagers du bus 1 occupent les chambres 4, 12, 20, 28, 36, ..., 4. (2i + 1), ...
- Les passagers du bus 2 occupent les chambres 8, 24, 40, 56, 72, ..., 8. (2i + 1), ...

etc.

Toutes les chambres sont occupées et jamais deux voyageurs différents ne se retrouvent dans la même chambre (car si 2^{i+1} (2j + 1) = $2^{i'+1}$ (2j' + 1) alors nécessairement i = i' et j = j').

Nouveau paradoxe : l'interrogation surprise

Ce paradoxe a été découvert pendant la seconde guerre mondiale. Les autorités suédoises, voulant organiser un exercice de défense civile, firent annoncer à la radio qu'un exercice d'alerte se déroulerait la semaine suivante et que, de façon à ce que l'épreuve se déroule dans des conditions proches des conditions réelles, personne ne pourrait connaître à l'avance la date de l'exercice. Le mathématicien Lennart Ekbom réalisa qu'un délicat paradoxe logique résultait de l'annonce. Le problème est maintenant connu dans le monde entier, et donne toujours lieu à un débat entre spécialistes de logique. En voici la présentation la plus connue appelée « L'interrogation surprise ».

Le professeur Martin annonce à ses élèves « (a) je ferai une interrogation la semaine prochaine et (b) vous ne pourrez pas savoir quel jour elle se déroulera ; ce sera une surprise ».

Jacques, le meilleur élève en mathématiques de la classe, raisonne alors ainsi :
« Nous avons cours avec Monsieur Martin le lundi, le mardi, le mercredi, le jeudi, le vendredi et le samedi. Puisqu'il nous dit que nous ne pourrons pas connaître le jour de l'interrogation, celle-ci ne se déroulera pas le samedi, car samedi matin, sachant que l'interrogation se fera dans la semaine (affirmation a), elle ne pourrait avoir lieu que le samedi et donc nous saurions de manière certaine qu'elle va avoir lieu. Il est donc acquis que l'interrogation n'aura pas lieu le samedi. Mais alors, le vendredi, elle ne peut pas avoir lieu non plus, car sachant qu'elle ne peut pas avoir lieu le samedi, quand nous arriverons dans la classe le vendredi, nous saurons qu'elle va avoir lieu. Il est donc acquis aussi que l'interrogation n'aura pas lieu le vendredi. »

En poursuivant de la même manière, Jacques en déduit que l'interrogation ne peut avoir lieu ni le jeudi, ni le mercredi, ni le mardi, ni le lundi et donc qu'elle n'aura pas lieu.

Pourtant, le mercredi de la semaine suivante, Monsieur Martin fait son interrogation à la grande surprise de Jacques. Monsieur Martin n'a pas menti puisque (a) l'interrogation s'est bien déroulée dans la semaine prévue comme il l'avait annoncé, et que (b) Jacques a été surpris le jour de l'interrogation. Le raisonnement de Jacques semble pourtant parfaitement rigoureux. Comment expliquer ce paradoxe ?