Paradoxes Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille*

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

Le paradoxe précédent :

On vous propose le jeu suivant appelé *La prochaine est rouge* :
- on bat les cartes d'un paquet de 32 cartes ;
- le meneur de jeu retourne les cartes une à une ;
- à un moment, librement choisi par vous, vous arrêtez le meneur de jeu et vous annoncez : « la prochaine carte sera rouge » ;
- le meneur retourne la carte, si vous avez raison vous avez gagné, sinon vous avez perdu.

Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez et par exemple attendre que presque toutes les cartes soient passées. Vous pouvez même attendre qu'il ne reste plus qu'une seule carte. Notez bien cependant que vous ne pouvez pas choisir entre *rouge* et *noire* (sinon, en attendant qu'il ne reste qu'une carte, vous gagneriez à chaque fois) : vous êtes obligé de parier sur *rouge* et lorsqu'il ne reste qu'une seule carte vous êtes donc obligé de dire « la prochaine carte sera rouge ». Cette stratégie consistant à attendre la dernière carte vous garantit de gagner une fois sur deux au moins, ce qui n'est pas mal.

Puisqu'on voit défiler les cartes (elles restent visibles une fois retournées), et qu'on est donc bien informé de ce qu'il reste dans le paquet des cartes à venir, il semble certain qu'il doit exister une méthode assurant de gagner plus d'une fois sur deux.

Le paradoxe est que ce n'est pas le cas : quelle que soit la méthode que vous adopterez, vous ne gagnerez jamais plus d'une fois sur deux, ni d'ailleurs moins d'une fois sur deux. Cela semble choquant. Il faut donc trouver un raisonnement imparable pour le démontrer ?

Solution :
Marc Lasson m'a proposé une bonne solution fondée sur le calcul par ordinateur de la meilleure façon de jouer, mais voici un raisonnement ne demandant pas d'ordinateur.
Imaginons un grand tableau composé de :
32! = 263130836933693530167218012160000000 lignes
chacune contenant un classement possible d'un jeu de 32 cartes.

Une stratégie consiste à fixer une règle du type « lorsque la dixième carte noire est passée je parie que la suivante est rouge ». Une stratégie ne dépend que du passé et détermine, en fonction de celui-ci, si j'arrête le meneur de jeu en lui disant « la prochaine est rouge ».
Fixons une méthode de jeu. Maintenant, dans chaque ligne du tableau, on place une étoile marquant l'endroit du pari, ce qui nous donne donc un tableau de 32! lignes chacune contenant une étoile. Voici un exemple de ligne (l'étoile est placée juste après la dixième carte noire et fait gagner le joueur car une carte rouge suit) :

V♣–D♥–V♥–10♠–R♠–As♣–8♦–8♥–7♣–10♦–As♥–8♣–9♦–V♠–D♣–D♠–As♦–9♥–R♣–*–R♦–As♠–7♠–8♠–9♣–9♠–10♣–V♦–D♦–R♥–7♥–10♥–7♦

Nous devons évaluer le nombre de lignes où l'étoile est suivie d'une carte rouge (partie gagnante pour le parieur) et le nombre de lignes où elle est suivie d'une carte noire (partie perdante pour le parieur). Nous allons montrer que ces deux nombres sont égaux. Pour cela, nous opérons la transformation suivante de notre tableau : nous permutons dans chaque ligne la carte située après l'étoile et la dernière carte :

la ligne xx…xx*Ayy…yyB devient xx…xx*Byy…yyA

Faire cette transformation revient à changer l'ordre des lignes du tableau. En effet, en même temps que la ligne xx…xx*Ayy…yyB est devenue xx…xx*Byy…yyA, la ligne xx…xx*Byy…yyA (même début xx…xx, donc même emplacement pour l'étoile, et mêmes cartes yy..yy) est devenue xx…xx*Ayy…yyB. Faire la transformation est donc équivalent à échanger les emplacements des deux lignes xx…xx*Ayy…yyB et xx…xx*Byy…yyA. Dans le cas où l'étoile est juste avant la dernière carte (le pari a été fait au dernier moment), la ligne xx…xx*A est restée elle-même. Au total le tableau transformé est donc constitué des 32! lignes du tableau initial, seul l'ordre des lignes a été changé.
Dans le tableau initial, il y avait exactement le même nombre de lignes se terminant par une carte noire que de lignes se terminant par une carte rouge (les rouges et les noires tiennent des rôles symétriques), donc dans le tableau transformé aussi. Et donc, il a exactement le même nombre de lignes se terminant par une carte A de couleur rouge que de lignes se

*Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022, Bât. M3

terminant par une carte A de couleur noire, ce qui signifie que la stratégie fait gagner le parieur exactement une fois sur deux. Notre raisonnement ne dépend pas de la stratégie considérée et donc quelle que soit la stratégie utilisée pour le jeu « La prochaine est rouge », elle fournit une chance sur deux de gagner, ni plus ni moins.

Nouveau paradoxe :

Voici maintenant un paradoxe classique mais déconcertant par sa simplicité (il a été inventé par Maurice Kraitchik dans les années 1930).
Monsieur A. propose à Monsieur B. le marché suivant :
- ils vont comparer les longueurs de leurs cravates et celui qui aura la plus longue cravate la donnera à l'autre (qui se retrouvera donc avec deux cravates).

Monsieur B. raisonne ainsi : « Ma cravate a pour longueur L. Si ma cravate est la plus longue, ce qui a une chance sur deux de se produire, je la perds donc je perds une cravate de longueur L. Sinon je gagne la cravate de Monsieur A. dont la longueur est L' avec L'> L. Donc : une fois sur deux je perds L et une fois sur deux je gagne plus que L. En moyenne je suis gagnant comme si une fois sur deux je perdais un euro et qu'une fois sur deux je gagnais deux euros. J'accepte donc l'offre de Monsieur A. qui m'avantage ».

Pourtant le jeu est parfaitement symétrique et donc Monsieur A. peut raisonner de la même façon et conclure que le jeu lui est favorable. Ce n'est pas possible : un jeu ne peut pas être favorable aux deux joueurs car ce qu'en moyenne l'un gagne, l'autre doit le perdre.

Comment sortir de cette contradiction ?