Paradoxes Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

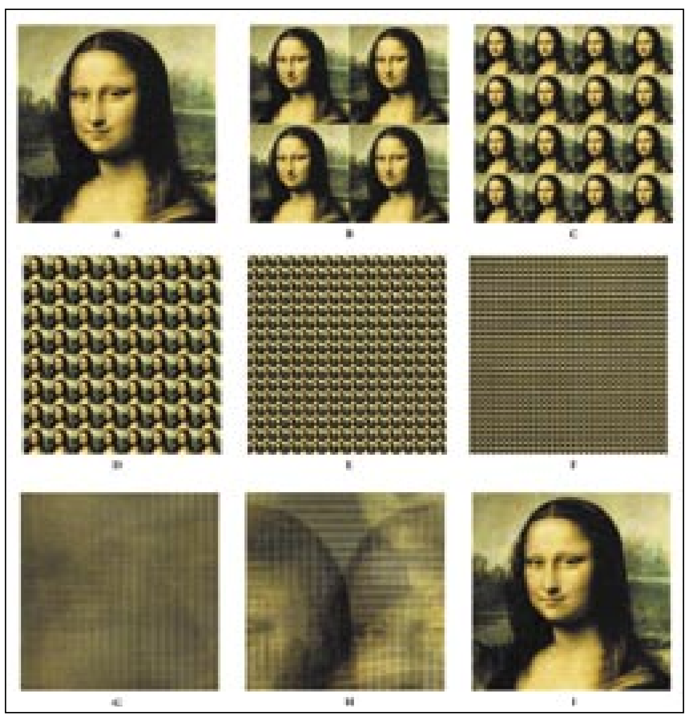
Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille*

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

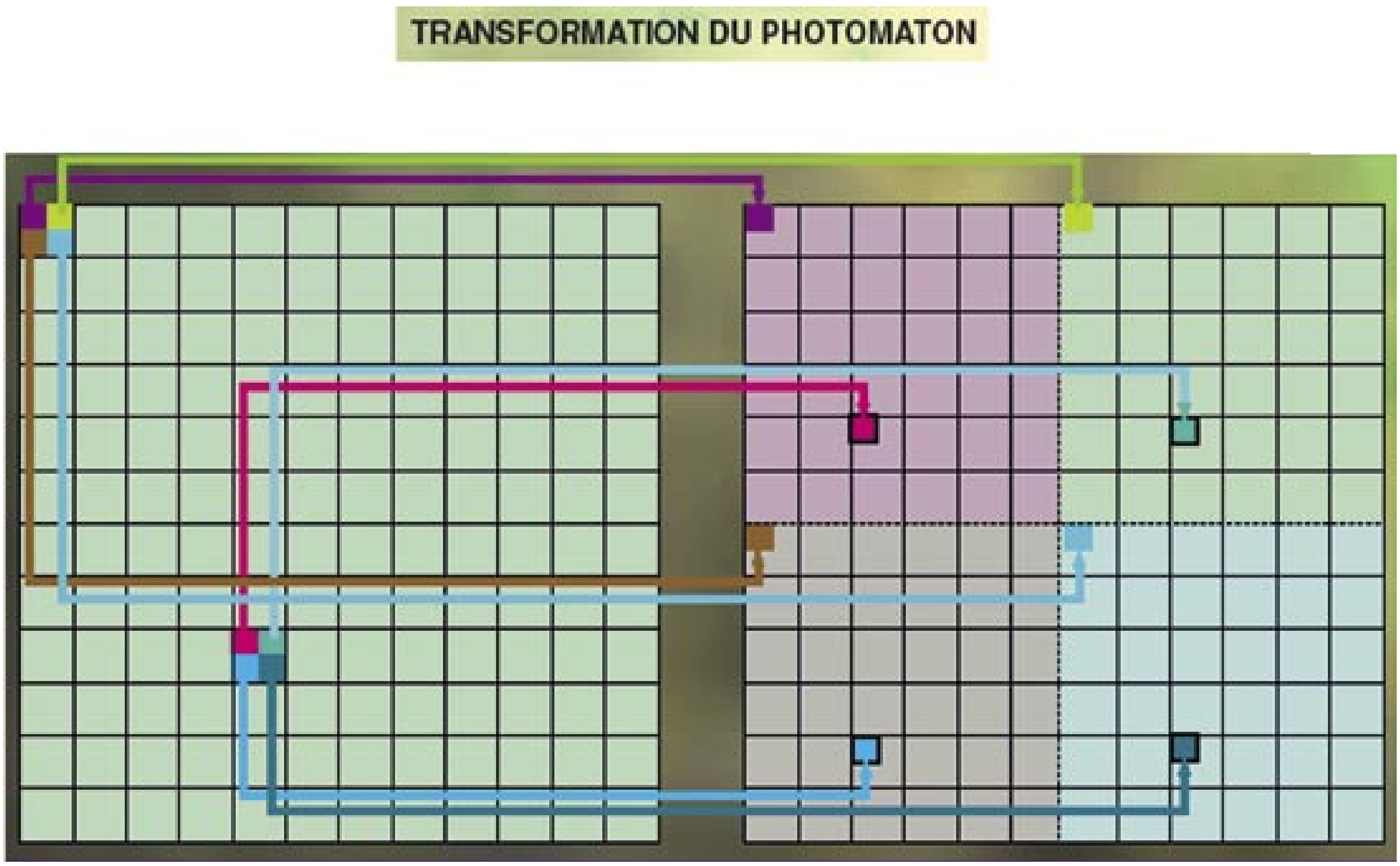
Le paradoxe précédent et sa solution : le paradoxe Mona Lisa

Le paradoxe était graphique. Une série de 9 images A, B, C, D, E, F, G, H, I était proposée. Chacune était obtenue à partir de la précédente en réduisant la taille de l'image de moitié et en replaçant côte à côte quatre réductions pour obtenir une image de la taille initiale. L'image A était une copie de la célèbre Mona Lisa, l'image B comportait 4 Mona Lisa... comme si elle avait été photographiée par un photomaton. L'image C en comportait 16. L'image D en comportait 64, etc. On précisait que le nombre de pixels était conservé d'une image à l'autre car les pixels étaient seulement déplacés.
Étrangement, l'image I (la neuvième) était identique à l'image A (la première), qui était donc « revenue » comme par miracle ! Il s'agissait d'expliquer cet étrange paradoxe graphique.
La solution est mathématique et s'appliquerait à toute transformation déplaçant les pixels d'une image. Puisque seuls des déplacements de pixels sont opérés d'une image à l'autre, cela signifie que la transformation est ce qu'en mathématiques on appelle une *permutation* des pixels. Notons-la p. Voir sur le dessin de la page de droite.
On a B=p(A), C=p(p(A)), etc. On sait que les permutations d'un ensemble fini constituent un groupe, ce qui signifie (entre autres choses) qu'il existe un entier k, tel que p opéré k fois est la transformation identité (c'est-à-dire l'opération qui ne change rien). Cela explique pourquoi on revient à l'image initiale.
Ce résultat peut sembler un peu abstrait, en réalité il est facile : lorsque l'on opère des modifications d'ordre bien précises et qu'on les recommence, on finit toujours par revenir à son point de départ. Voici un exemple simple qui fera comprendre l'idée. Dans une liste de 5 objets, on échange le premier et le troisième, et, en même temps, on fait passer le deuxième en position 4, celui qui est en position 4 est mis en position 5 et celui qui est en position 5 est mis en position 2 :
abcde -> ceabd
Si, partant de abcde, on recommence sans cesse cette transformation, on obtient successivement :
abcde -> ceabd -> adceb -> cbade -> aecbd -> cdaeb -> abcde.
On est revenu au point de départ en 6 étapes.

Avec nos pixels, la situation était analogue, et donc on était certain dès le départ que l'image initiale réapparaîtrait. Pour justifier qu'elle réapparaît à la huitième itération exactement (ni avant, ni après) il faut entrer dans le détail de la définition de la transformation du photomaton. L'image utilisée comporte 256 lignes et 256 colonnes (numérotées de 0 à 255). La transformation du photomaton consiste à réaliser l'opération suivante sur les numéros des lignes : on prend les lignes de rang pair qu'on fait suivre de celles de numéro impair. De même pour les numéros des colonnes (cela explique l'apparition de quatre versions en plus petit de l'image initiale). Le pixel (0,0) reste donc en position (0,0) ; le pixel (1,0) passe en position (128,0) ; le pixel en position (1,1) passe en position (128,128) ; le pixel en position (4,5) passe en position (2,130), etc. (pour un numéro pair 2k on passe à k, pour un numéro impair 2k+1 on passe à 128+k). L'étude de cette transformation n'est pas très difficile (elle peut aussi être simulée par ordinateur) et conduit au résultat qu'en huit étapes exactement chaque pixel est revenu à sa place. Pour plus de détails voir le lien internet : http://www.lifl.fr/~mathieu/transform/index.html.



*Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022, Bât. M3



Nouveau paradoxe : Impossible de gagner ?

Il s'agit d'un paradoxe dû au mathématicien prestidigitateur P. Diaconis.
On vous propose le jeu suivant dénommé *La prochaine est rouge* :
- on bat les cartes d'un paquet de 32 cartes ;
- le meneur de jeu retourne les cartes une à une ;
- à un moment, librement choisi par vous, vous arrêtez le meneur de jeu et vous annoncez : « la prochaine carte sera rouge » ;
- le meneur retourne la carte, si vous avez raison vous avez gagné, sinon vous avez perdu.

Vous pouvez utiliser la méthode que vous voulez et, par exemple, attendre que presque toutes les cartes soient passées. Vous pouvez même attendre qu'il ne reste plus qu'une seule carte. Notez bien cependant que vous ne pouvez pas choisir entre *rouge* et *noire* (sinon, en attendant qu'il ne reste qu'une carte, vous gagneriez à chaque fois) : vous êtes obligé de parier sur *rouge* et lorsqu'il ne reste qu'une seule carte vous êtes donc obligé de dire « la prochaine carte sera rouge ».
La stratégie évidente consistant à attendre la dernière carte vous garantit de gagner une fois sur deux au moins (ce qui n'est pas mal). La stratégie consistant à parier dès la première carte donne aussi une chance sur deux de gagner. Il ne faut donc ni se précipiter, ni trop attendre pour avoir une probabilité de gagner supérieure à 1/2. Puisqu'on voit défiler les cartes (elles restent visibles une fois retournées), et qu'on est donc bien informé de ce qu'il reste dans le paquet des cartes à venir, il semble à peu près évident qu'il doit exister une méthode pour gagner plus d'une fois sur deux.
Le paradoxe est que ce n'est pas le cas : quelle que soit la méthode que vous adopterez, vous ne gagnerez jamais plus d'une fois sur deux (ni d'ailleurs moins d'une fois sur deux). Vous en doutez ? Proposez donc une méthode et testez-là. Vous constaterez sans doute qu'elle ne vous permet pas de gagner plus d'une fois sur deux. Essayez de démontrer par un raisonnement mathématique rigoureux que c'est bien ainsi, et envoyez-moi votre raisonnement.
Si vraiment vous découvrez une stratégie qui vous donne mieux qu'une chance sur deux de gagner, je suis prêt à jouer avec vous. Il faut que vous soyez sûr de vous car nous jouerons à 2 contre 3 : à chaque partie, vous engagerez 3 euros et moi 2.