

Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

Par **Jean-Paul DELAHAYE**

Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille*

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

Rappel du problème précédent : le paradoxe des Dupont

Supposons donnée une infinité de personnages (appelés Dupont-0, Dupont-1, ..., Dupont-n,...) placés en ligne les uns derrière les autres :

- Dupont-0 est placé en tête de la rangée infinie et n'a personne devant lui,
- Dupont-1 est placé juste derrière Dupont-0,
- Dupont-2 est placé juste derrière Dupont-1, etc.

Chaque Dupont prononce la phrase : « au moins une personne derrière moi ment ». Qui dit vrai ? qui ment ?

D'après le sens des phrases prononcées :

- derrière tout Dupont qui dit vrai, il y a au moins un Dupont qui ment ;
- si un Dupont ment alors tous les Dupont derrière lui disent la vérité.

Si on désigne par M les Dupont qui mentent et par H ceux qui sont honnêtes et donc ne mentent pas, les deux règles précédentes se traduisent en : (a) derrière tout H, il y a au moins un M et (b) derrière un M, il n'y a que des H. Or il est impossible de concevoir une suite infinie de M et de H qui vérifie les règles (a) et (b), car tout M doit être suivi uniquement de H, ce qui ne se peut pas puisque tout H doit être suivi d'au moins un M. La situation est contradictoire. Pourquoi ?

Solution

Comme dans le cas du paradoxe du menteur (celui qui dit « je mens » ne dit pas vrai - car cela signifierait qu'il ment -, ni ne ment - car cela signifierait qu'il dit vrai), aucune solution pleinement satisfaisante n'a aujourd'hui été proposée.

Pour le paradoxe du menteur, on se contente souvent de le résoudre en affirmant que, si on dit de certaines phrases qu'elles sont vraies ou fausses, il faut s'interdire d'inclure dans les phrases visées la phrase qu'on prononce. Plus généralement lorsque plusieurs phrases sont concernées parlant de vérité et de fausseté (comme dans le paradoxe de Pierre et Paul : Pierre dit : « Ce que dit Paul est faux » et Paul dit : « Ce que dit Pierre est vrai ») il faut s'interdire les cycles (si Pierre parle de la phra-

se de Paul alors Paul ne doit pas parler de celle de Pierre).

La solution de l'interdiction des cycles se généralise et conduit à une solution qui résout (de manière moyennement satisfaisante) le paradoxe du menteur, celui de Pierre et Paul et celui des Dupont. La généralisation est :

- lorsqu'on considère des phrases parlant de vérité et de fausseté, il faut s'interdire les cycles et s'interdire les situations infinies.

Si vous disposez d'une meilleure solution, signalez-le moi.

Nouveau paradoxe : Mona Lisa au photomaton

Cette fois le paradoxe proposé est uniquement graphique.

Regardez attentivement la série de 9 images A, B, C, D, E, F, G, H, I.

Chacune a été obtenue à partir de la précédente en réduisant la taille de l'image de moitié ce qui a donné quatre morceaux analogues qu'on a placés en carré pour obtenir une image ayant la même taille que l'image d'origine. Le nombre de pixels a été exactement conservé et en fait on a seulement déplacé les pixels pour avoir quatre réductions de l'image initiale.

Cette transformation s'appelle la transformation du photomaton. L'image B comporte 4 Mona Lisa. L'image C en comporte 16. L'image D en comporte 64, etc.

Il se produit quelque chose d'étrange car, au bout de neuf étapes, l'image de Mona Lisa est réapparue. Précisons que c'est bien la même transformation qui a été utilisée pour déduire les unes après les autres les images de la série (c'est un programme d'ordinateur de Philippe Mathieu qui a fait le travail à chaque fois : <http://www.lifl.fr/~mathieu/transform/index.html>).

Savez-vous expliquer le paradoxe graphique de la réapparition de l'image initiale ?

*Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille,
UMR CNRS 8022, Bât. M3



A



B



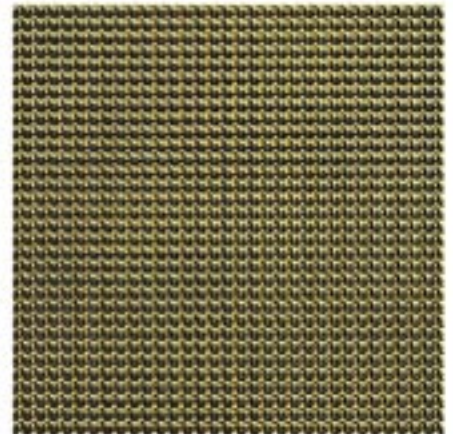
C



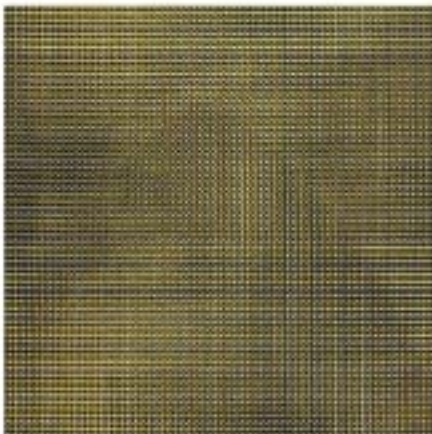
D



E



F



G



H



I