paradoxes

Par Jean-Paul DELAHAYE
Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille *

Petite rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Le but de cette rubrique est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier au service culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

Rappel du problème précédent

La fonction $x \to x^3$ est définie pour tout nombre réel, elle est continue et dérivable pour tout nombre réel. On calcule sa dérivée par la formule habituelle $(x^n)' = nx^{n-1}$. Pour tout nombre réel x, on a donc $(x^3)' = 3x^2$.
On calcule la dérivée par un autre raisonnement : pour tout entier $x \geq 2$, on écrit : $x^3 = x^2 + x^2 + ... + x^2$. La somme à droite de l'égalité comporte x fois le terme x^2. On dérive de chaque côté de l'égalité en utilisant que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées : $(x^3)' = (x^2)' + (x^2)' +... + (x^2)'$. On applique la formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ rappelée plus haut (qui donne $(x^2)' = 2x$) et l'on obtient $(x^3)' = 2x + 2x + ... + 2x = 2x^2$ (car le terme $2x$ apparaît x fois). Pour tout entier $x \geq 2$, nous avons donc : $(x^3)' = 3x^2 = 2x^2$. En simplifiant par x^2, qui n'est pas nul, cela donne $2 = 3$. Où est l'erreur ?

Solution. Le second calcul suppose que x est un entier (sinon on ne pourrait pas écrire $x^3 = x^2 + x^2 + ... + x^2$). Appelons n l'entier fixé auquel on s'intéresse. Les fonctions $x \to x^3$ et $x \to x^2 + x^2 + x^2 +... + x^2$ (n fois le terme x^2) ont effectivement la même valeur au point $x = n$ et cette valeur est n^3. Ces deux fonctions sont dérivables pour tout nombre réel x. Cependant autour de la valeur n, ces deux fonctions n'ont pas les mêmes valeurs car : $(n+y)^3 \neq (n+y)^2 + (n+y)^2 + ... + (n+y)^2 = n(n+y)^2$. Puisque les deux fonctions sont différentes, il n'y a aucune surprise au fait que leurs dérivées soient différentes.
Le point précis où se produit l'erreur est lorsqu'on écrit « on dérive de chaque côté », car l'égalité $x^3 = x^2 + x^2 + ... + x^2$ désigne une égalité valable entre deux fonctions différentes en un point précis et non pas une égalité entre deux fonctions sur tout leur ensemble de définition. L'erreur est en fait la même que celle que l'on commettrait en disant : $x = x^2$ pour $x = 0$, donc $x' = (x^2)'$ en $x = 0$, donc $1 = 2x$ en $x = 0$, donc $1 = 0$.

*Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille,

prendre la tête

Les deux enveloppes

Amandine me montre deux enveloppes fermées identiques A et B. Elle me dit que l'une contient une certaine somme en euros et que l'autre contient le double de cette somme. Elle ne me dit pas quelle est celle des deux enveloppes qui contient le plus. Comme c'est mon anniversaire, elle m'offre de choisir une des enveloppes et me dit que son contenu sera pour moi.

N'ayant pas de raison particulière de préférer l'une à l'autre, je choisis d'abord l'enveloppe A. Cependant, au moment de l'ouvrir, je raisonne ainsi.

- L'enveloppe A contient une certaine somme, disons Y euros (j'ignore bien sûr quelle est cette somme).
- Il y a une chance sur deux pour que B contienne 2Y euros, et une chance sur deux pour que B contienne Y/2 euros, car ayant choisi A au hasard, il y a autant de chances que A contienne la plus petite somme (dans ce cas B contient 2Y euros), ou que A contienne la plus grande somme (dans ce cas B contient Y/2 euros).
- L'espérance de contenu de l'enveloppe B est donc :

$2Y \times 1/2 + Y/2 \times 1/2 = 1{,}25\ Y$ euros

Rappelons que l'espérance est la moyenne pondérée par les probabilités de ce que je peux gagner selon les diverses éventualités ; ici c'est ce qu'on trouverait en moyenne dans B, si on recommençait l'expérience un très grand nombre de fois.

L'espérance de contenu de B étant 1,25 Y euros, et celle de A étant bien sûr de Y euros, mon intérêt est de changer mon premier choix et de prendre B à la place de A. En moyenne, cela me rapportera 25% de plus.

Est-ce bien certain ?

Non. Il y a quelque chose de ridicule dans cette histoire car, si au départ j'avais choisi B, le même raisonnement me conduirait maintenant à reporter mon choix sur A. Le raisonnement est donc faux. Mais en quoi précisément est-il faux ?