paradoxes

par Jean-Paul Delahaye
Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille *
e-mail : delahaye@lifl.fr

Petite rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Le but de cette rubrique est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier au service culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

Rappel du problème précédent

Voici la démonstration que toute série converge vers π. Soit une série quelconque :
$a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + \ldots$
Les égalités suivantes sont évidentes :
$a1 = \pi + (a1 - \pi)$
$a2 = - (a1 - \pi) + (a1 + a2 - \pi)$
$a3 = - (a1 + a2 - \pi) + (a1 + a2 + a3 - \pi)$
$a4 = - (a1 + a2 + a3 - \pi) + (a1 + a2 + a3 + a4 - \pi)$, etc.
En ajoutant toutes ces égalités nous obtenons une nouvelle égalité :
$a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + \ldots =$
$\pi + (a1 - \pi) - (a1 - \pi) + (a1 + a2 - \pi) - (a1 + a2 - \pi) + (a1 + a2 + a3 - \pi) - (a1 + a2 + a3 - \pi) + (a1 + a2 + a3 + a4 - \pi) - \ldots$
Toutes les parenthèses dans le second membre se simplifient deux à deux.
Donc : $a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + \ldots = \pi$. C'est absurde : toute série ne peut pas valoir π !

Solution. Merci aux lecteurs qui m'ont fait parvenir leur analyse. Les sommes infinies ne peuvent être manipulées sans précautions et il est naïf de croire que tout ce qui est vrai pour les sommes finies s'étend aux sommes infinies. La théorie des séries formule et explique les règles qu'on doit respecter et met en garde contre celles, parfois tentantes, qui conduisent à l'absurde. En particulier, «prendre des égalités et en déduire que la somme des premiers membres est égale à la somme des seconds membres» est une règle vraie lorsque les égalités sont en nombre fini, mais qui, dans le cas d'une infinité d'égalités, est susceptible de produire des catastrophes. C'est ce qui se passe dans notre démonstration. L'exemple suivant (plus simple que celui du paradoxe qui n'en est qu'une version compliquée) devrait vous convaincre définitivement qu'on ne peut ajouter sans précautions une infinité d'égalités. Partons de l'égalité $0 = 1 - 1$ écrite une infinité de fois :

$$0 = 1 - 1$$
$$0 = 1 - 1$$
$$0 = 1 - 1$$
$$\ldots$$

Additionnons d'une part les premiers membres, et d'autre part les seconds membres. Nous obtenons une nouvelle égalité :

$$0 + 0 + 0 + \ldots = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Simplifions à gauche et plaçons des parenthèses à droite de la manière suivante :

$$0 = 1 + (- 1 + 1) + (- 1 + 1) + (- 1 + 1) + \ldots$$

En simplifiant les parenthèses nous obtenons :

$$0 = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1$$

Le détail des règles autorisées et interdites dans la manipulation des sommes infinies est parfaitement connu aujourd'hui et est décrit dans les livres de mathématiques : les professeurs de mathématiques qui vous demandent d'être prudents ne le font pas pour le plaisir de vous ennuyer mais parce que, sans précautions, on prouve que $0 = 1$.

*Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille,

nouveau paradoxe

se prendre la tête

Désolantes dérivées

Le raisonnement suivant semble être mené avec précaution et rigueur, il n'utilise que des propriétés élémentaires de la dérivation. Pourtant, il arrive à une conclusion absurde.

Considérons la fonction $x \to x^3$. Elle est définie pour tout nombre réel, elle est continue et dérivable pour tout nombre réel. Calculons la dérivée de deux façons différentes :

(a) Par la formule habituelle $(x^n)'=nx^{n-1}$. Pour tout nombre réel x on a donc :

$$(x^3)' = 3x^2$$

(b) Par le raisonnement suivant.

Pour tout entier $x \geq 2$ on écrit :

$$x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + \ldots + x^2$$

La somme à droite de l'égalité comporte x fois le terme x^2.

On dérive de chaque côté de l'égalité en utilisant que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées :

$$(x^3)' = (x^2)' + (x^2)' + (x^2)' + \ldots + (x^2)'$$

On applique la formule $(x^n)'=nx^{n-1}$ rappelée plus haut (qui donne $(x^2)' = 2x$) :

$$(x^3)' = 2x + 2x + 2x + \ldots + 2x$$

On utilise le fait que le terme $2x$ apparaît x fois et donc que la somme à droite de l'égalité vaut $2x^2$:

$$(x^3)' = 2x^2$$

Pour tout entier $x \geq 2$ nous avons donc $(x^3)' = 3x^2$ par la formule usuelle (a) et $(x^3)' = 2x^2$ par le raisonnement détaillé en (b). Donc pour tout entier $x \geq 2$:

$$3x^2 = 2x^2$$

En simplifiant par x^2 (qui est non nul), cela donne :

$$2 = 3$$

Où est l'erreur ?