paradoxes

par Jean-Paul Delahaye
Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille *
e-mail : delahaye@lifl.fr

Petite rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment

Les paradoxes sont un stimulant intellectuel et on les trouve à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Mon but dans cette rubrique est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication des paradoxes proposés, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier au service Culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

Réponses au problème précédent

Rappel du problème. Nous allons démontrer que lorsque n pièces de monnaies (n≥2) d'apparences identiques sont données, l'une plus légère que les autres, alors trois pesées au plus avec une balance à deux plateaux (permettant de comparer des poids sans les mesurer) suffisent pour l'identification de la pièce la plus légère. Lorsque n=2, on procède de la manière suivante. On prend les deux pièces (indiscernables), on en place une sur le plateau de gauche et une autre sur le plateau de droite de la balance. L'équilibre ne se fait pas car l'une des pièces est plus légère par hypothèse. On sait bien sûr la repérer car c'est celle qui se trouve sur le plateau qui monte (dans ce cas simple, une seule pesée a suffi). Soit maintenant n ≥ 2. Supposons que nous connaissions une procédure utilisant au plus trois pesées pour n pièces (hypothèse de récurrence) et montrons comment en obtenir une pour n+1 pièces. Donnons-nous n+1 pièces dont l'une est plus légère que les autres (qui, elles, ont toutes un poids identique). Nous mettons à part l'une des n+1 pièces, et nous appliquons la procédure donnée par l'hypothèse de récurrence aux n pièces restantes. Si cette procédure fonctionne on connaît la pièce la plus légère, sinon la pièce la plus légère est celle que nous avons mis de côté. Donc, en au plus trois pesées, nous avons réussi à connaître la pièce la plus légère parmi les n+1 pièces données. Le raisonnement par récurrence fonctionne donc bien et, en conséquence, pour tout entier n ≥ 2, il existe une procédure en trois pesées permettant d'identifier une pièce plus légère que les autres dans un ensemble de n pièces.

Croyez-vous vraiment qu'avec un million de pièces en trois pesées, vous pouvez repérer celle qui est la plus légère ? N'est-il pas étrange que le raisonnement présenté semble s'adapter et arriver à la même conclusion avec une seule pesée au lieu de trois ? Il y a donc une erreur. Laquelle ?

Solution. L'erreur vient de la confusion entre :
- (a) - procédure qui repère la pièce la plus légère lorsqu'on lui donne des pièces dont l'une est plus légère, et
- (b) - procédure qui indique que toutes les pièces sont de poids identique si c'est le cas, et qui indique la plus légère si l'une est plus légère.

Une procédure de pesée du premier type pour trois pièces demande une seule pesée (vous prenez deux pièces, si elles ont le même poids, c'est que la troisième est la plus légère, sinon vous savez laquelle des deux est la plus légère). Une procédure du second type pour trois pièces demande en revanche deux pesées au moins car, après une pesée, si les deux pièces essayées ont le même poids, vous ne pouvez savoir si la troisième a le même poids ou si elle est plus légère. Rechercher des procédures de type (a) n'est donc pas la même chose que rechercher des procédures de type (b). Ceci étant compris, l'erreur est facile à repérer : l'énoncé mentionne des procédures du type (a), mais le raisonnement subrepticement utilise l'hypothèse de récurrence avec une procédure de type (b).

*Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille,

nouveau paradoxe

se prendre la tête

La plus belle propriété du nombre π

L'importance mathématique du nombre π n'est plus à démontrer. Pourtant la propriété suivante de π (découverte par E. P. Northrop) ne manquera pas de vous étonner :

toute série converge vers π.

En effet, soit une série quelconque (par prudence et si vous savez ce que c'est, vous pouvez considérer une série absolument convergente) :

$a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + \dots$

Les égalités (finies) suivantes sont immédiates :

$a1 = \pi + (a1 - \pi)$

$a2 = - (a1 - \pi) + (a1 + a2 - \pi)$

$a3 = - (a1 + a2 - \pi) + (a1 + a2 + a3 - \pi)$

$a4 = - (a1 + a2 + a3 - \pi) + (a1 + a2 + a3 + a4 - \pi)$

etc.

En ajoutant toutes ces égalités nous obtenons une nouvelle égalité :

$a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + \dots =$

$\pi + (a1 - \pi) - (a1 - \pi) + (a1 + a2 - \pi) - (a1 + a2 - \pi) + (a1 + a2 + a3 - \pi) - (a1 + a2 + a3 - \pi) + (a1 + a2 + a3 + a4 - \pi) - \dots$

Toutes les parenthèses dans le second membre de cette égalité se simplifient deux à deux et disparaissent. Donc :

$a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 + a7 + \dots = \pi$

Pensez-vous vraiment que cela soit normal ?

Remarquez bien que si tous les ai sont nuls à partir de a5, on obtient :

$a1 + a2 + a3 + a4 = \pi$

et donc toute somme de quatre nombres vaut π.

Mieux encore, si tous les ai sont nuls à partir de a2, on a : $a1 = \pi$. *Tout nombre vaut donc 3,1415926... Il doit y avoir quelque chose qui cloche.*