Les paradoxes sont un stimulant intellectuel et on les trouve à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Mon but avec cette rubrique est de vous provoquer et de vous faire réfléchir.
Si vous pensez avoir une explication du paradoxe que je vous propose, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier au service culture de l'USTL ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

Dans le prochain numéro d'Archimède : les meilleures solutions seront proposées.

Petite rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur d'informatique
à l'Université des Sciences
et Technologies de Lille*

Réponses au problème précédent

Les paradoxes présentés dans la chronique précédente sont ce qu'on appelle *des paradoxes de l'autoréférence* et ce sont de vrais paradoxes en ce sens qu'accepter de considérer que les phrases envisagées sont vraies ou fausses conduit inévitablement à des contradictions : il n'y a pas d'erreurs de raisonnement. Le plus simple paradoxe de l'autoréférence est le fameux *paradoxe du menteur* :

«je suis en train de mentir»

Si c'est vrai, c'est que je mens, donc c'est faux : contradiction. Si c'est faux, je mens et donc c'est vrai : contradiction.
De nombreuses théories ont été proposées pour *traiter* ces paradoxes. La plus simple consiste à décréter : les phrases autoréférentes ne sont pas de vraies phrases et doivent être interdites comme le sont les phrases grammaticalement incorrectes. Une telle théorie est insatisfaisante puisque certaines phrases autoréférentes (comme «je suis en train d'écrire cette phrase») ne créent pas de problèmes. D'autres théories plus subtiles sont moins radicales, mais aucune aujourd'hui ne fait l'unanimité chez les spécialistes et les paradoxes de l'autoréférence restent donc assez mystérieux.

Notons que les paradoxes de l'autoréférence ne contaminent pas les systèmes de raisonnements utilisés en mathématiques (il serait très grave pour les mathématiciens de rencontrer des contradictions dans leurs théories), mais qu'au contraire, soigneusement adaptés, ils permettent de prouver des théorèmes intéressants : théorèmes d'incomplétude de Gödel, théorème de Tarski sur les prédicats de vérité.

*Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UPRES A. CNRS 8022, Bât M3
e-mail : delahaye@lifl.fr

Nouveau paradoxe : Trois pesées suffisent toujours

Voici un joli raisonnement par récurrence dû à Keith Austin conduisant à une étrange conclusion. Nous allons démontrer que lorsque n pièces de monnaies ($n \geq 2$) d'apparences identiques sont données, l'une plus légère que les autres, alors trois pesées au plus avec une balance à deux plateaux (permettant de comparer des poids sans les mesurer) suffisent pour l'identification de la pièce la plus légère.

Raisonnement.

Lorsque n=2, on procède de la manière suivante. On prend les deux pièces (indiscernables), on en place une sur le plateau de gauche et une autre sur le plateau de droite de la balance. L'équilibre ne se fait pas car l'une des pièces est plus légère par hypothèse. On sait bien sûr la repérer car c'est celle qui se trouve sur le plateau qui monte (dans ce cas simple, une seule pesée a suffi).

Soit maintenant $n \geq 2$. Supposons que nous connaissions une procédure utilisant au plus trois pesées pour n pièces (hypothèse de récurrence) et montrons comment en obtenir une pour n+1 pièces. Donnons-nous n+1 pièces dont l'une est plus légère que les autres (qui, elles, ont toutes un poids identique). Nous mettons à part l'une des n+1 pièces, et nous appliquons la procédure donnée par l'hypothèse de récurrence aux n pièces restantes. Si cette procédure fonctionne, on connaît la pièce la plus légère, sinon la pièce la plus légère est celle que nous avons mis de côté. Donc, en au plus trois pesées, nous avons réussi à connaître la pièce la plus légère parmi les n+1 pièces données. Le raisonnement par récurrence fonctionne donc bien et, en conséquence, pour tout entier $n \geq 2$, il existe une procédure en trois pesées permettant d'identifier une pièce plus légère que les autres dans un ensemble de n pièces.

Croyez-vous vraiment qu'avec un million de pièces, en trois pesées vous pouvez repérer la plus légère ? N'est-il pas étrange que le raisonnement présenté semble s'adapter et arriver à la même conclusion avec une seule pesée au lieu de trois ?
Il y a donc une erreur. Laquelle ?

Qu'est-ce qui cloche ?

e-mail: delahaye@lifl.fr