

Les paradoxes sont un stimulant intellectuel qui a été à l'origine de nombreux progrès mathématiques ou logiques, mais notre but dans cette rubrique sera uniquement de vous provoquer et de vous faire réfléchir.

Si vous pensez avoir une explication du paradoxe que je vous propose, envoyez-la moi (par courrier au service culture de l'USTL).

Dans le prochain numéro d'Archimède : les meilleures solutions seront proposées.

Petite rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

par Jean-Paul DELAHAYE

Professeur d'informatique
à l'Université des Sciences
et Technologies de Lille*

Réponses au problème précédent

Merci pour les lettres et e-mail reçus qui proposaient tous la bonne solution pour traiter le paradoxe du numéro précédent. Le raisonnement par récurrence était faux car pour montrer que pour tout $k \geq 1$, $\text{Pro}(k)$ entraîne $\text{Pro}(k+1)$, j'écrivais :

Soit un ensemble E ayant $k+1$ éléments et contenant 2. Soient deux parties A et B différentes l'une de l'autre, contenues dans E ,

chacune ayant 2 pour élément et ayant chacune k éléments.

Or, lorsque $k = 1$, toute partie contenue dans E , ayant 2 pour élément et ayant k élément est égale à $\{2\}$. Il est donc impossible de trouver deux parties A et B différentes comme je le supposais implicitement. La récurrence proposée était impeccable... sauf pour $k=1$, et donc tout était faux et le paradoxe n'était qu'une illusion.

*Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UPRES A. CNRS 8022, Bât M3
e-mail: delahaye@lilfl.fr

...

Nouveau paradoxe : Vous êtes la personne la plus riche du monde

Réjouissez-vous car aujourd'hui nous allons vous démontrer par deux raisonnements différents —au cas où un seul ne vous suffirait pas— que vous êtes la personne le plus riche du monde.

Première démonstration

Considérons la phrase suivante dont nous ne savons pas pour l'instant si elle est vraie ou si elle est fausse :

(A) Si (A) alors vous êtes la personne la plus riche du monde.

C'est une phrase qui parle d'elle-même (la phrase (A) mentionne (A)), mais cela n'est pas interdit et par exemple la phrase «je suis en train d'écrire cette phrase» parle aussi d'elle-même et est vraie car, au moment où je l'écrivais, j'étais effectivement en train de l'écrire.

Raisonnons maintenant à partir de la phrase (A). Supposons que (A) est vraie. Alors la phrase (A) possède une prémisse vraie et est vraie (car j'ai supposé (A)) et donc sa conclusion est vraie (je viens d'utiliser l'évidence suivante, appelée règle du *modus ponens* : si la phrase «si (A) alors (B)» est vraie et que sa prémisse (A) est vraie, alors sa conclusion (B) est vraie). Donc, sous l'hypothèse (A), vous êtes la personne la plus riche du monde.

Le raisonnement du paragraphe ci-dessus a montré que lorsque je suppose que (A) est vraie alors vous êtes la personne la plus riche du monde. Autrement dit il a montré que :

si (A) alors vous êtes la personne la plus riche du monde.

Mais cette affirmation est exactement ce que dit la phrase (A) donc la phrase (A) est vraie (cette fois sans rien avoir à supposer). Maintenant nous savons sans avoir à faire d'hypothèse que (A) est vraie. Le raisonnement du paragraphe commençant par «Raisonnons ...» montre donc que vous êtes la personne la plus riche du monde sans qu'aucune hypothèse soit nécessaire.

En conclusion vous êtes bien la personne la plus riche du monde.

Deuxième démonstration

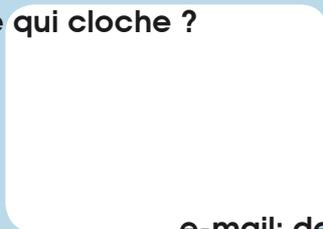
Vous trouvez cela un peu compliqué et vous n'aimez pas les phrases qui parlent d'elles-mêmes. Considérons donc les trois phrases suivantes (dont pour l'instant nous ne savons pas lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses).

- La troisième phrase est vraie et vous êtes la personne la plus riche du monde.
- La troisième phrase n'est pas vraie.
- Une au moins des deux premières phrases est vraie.

Supposons que la troisième phrase est fausse. Cela signifie que la première et la seconde phrase sont toutes les deux fausses. Mais si la seconde phrase est fausse alors la troisième est vraie, et donc, la troisième phrase est à la fois fausse (c'est notre hypothèse) et vraie (nous venons de le déduire), ce qui ne se peut pas. Donc, l'hypothèse faite en début du paragraphe conduit à une contradiction. Cette hypothèse est donc fausse (c'est ce qu'on appelle un raisonnement par l'absurde : si supposer que A est faux conduit à une contradiction, c'est que A est vrai). Donc, la troisième phrase est vraie, et donc la seconde phrase est fausse, et donc (d'après ce que dit la troisième phrase en utilisant que la seconde phrase est fausse) la première phrase est vraie. Et donc, vous êtes la personne la plus riche du monde.

Vous connaissez pourtant des gens plus riches que vous. Qu'est-ce qui cloche ?

Qu'est-ce qui cloche ?



e-mail: delahaye@lifl.fr