Les paradoxes sont un stimulant intellectuel qui ont été à l'origine de nombreux progrès mathématiques ou logiques, mais notre but dans cette rubrique sera uniquement de vous provoquer et de vous faire réfléchir.
Si vous pensez avoir une explication du paradoxe que je vous propose, envoyez-la moi (par courrier au service culture de l'USTL).

Dans le prochain numéro d'Archimède : les meilleures solutions seront proposées.

Petite rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur d'informatique
à l'Université des Sciences
et Technologies de Lille*

Réponses au problème précédent "Bien ranger son argent"

Merci pour les lettres reçues qui proposaient des idées pour traiter le paradoxe du numéro précédent.
Comme le fait remarquer Antoine Delille, il est illogique que les deux personnages (Jacques et Julie) qui gagnent chacun deux pièces par jour et en économisent une, possèdent *à la fin des temps* des sommes d'argent différentes. Rappelons que Jacques place les deux nouvelles pièces sous sa pile et dépense celle du dessus, et finit donc par dépenser chaque pièce gagnée: il n'a donc plus rien *à la fin des temps.* Julie, elle, dépense l'une des pièces gagnées et met l'autre de côté, et est donc infiniment riche *à la fin des temps.*
Pour résoudre cette apparente contradiction, une solution consiste à dire que tout cela n'a pas de sens, car il n'y a pas de sens à considérer ce qui se passe *à la fin des temps.*
Une analyse plus fine est cependant possible. On peut en effet donner un sens à ce qu'on possède *à la fin des temps*, en utilisant la notion de limite d'ensembles (plus précisément il s'agit de ce qu'on appelle la limite inférieure d'ensembles).
Un élément (ici une pièce) est conservée *à la fin des temps* (c'est-à-dire appartient à la limite de l'ensemble des pièces économisées) si à partir d'un certain moment on est toujours resté en sa possession. On découvre alors que la limite des ensembles E(n) n'a pas nécessairement un nombre d'éléments (on parle de cardinal) correspondant à la limite du nombre des éléments des E(n) autrement dit : lim card E(n) n'est pas forcément égal à card lim E(n). C'est de présupposer inconsciemment l'égalité qui conduit à la surprise de l'histoire précédente et au sentiment d'une absurdité. La situation est un peu la même que si nous étions étonnés que $\sin(Pi/6 + Pi/6) \neq 1$ alors que $\sin(Pi/6) = 1/2$: il n'y a aucun paradoxe mais l'utilisation implicite de l'idée fausse que $\sin(a+b) = \sin(a) + \sin(b)$.

*Laboratoire d'Informatique
Fondamentale de Lille,
UPRES A. CNRS 8022, Bât M3
e-mail: delahaye@lifl.fr

...

...

Nouveau paradoxe :

Le raisonnement mathématique, s'il est mené avec rigueur, ne peut conduire que de vérités en vérités. Pourtant, certains raisonnements, présentant tous les dehors d'une rigueur irréprochable, conduisent à des absurdités. C'est un jeu, parfois difficile, que de découvrir ce qui cloche en eux.
Nous allons voir un exemple de raisonnement conduisant à l'affirmation absurde : tout nombre ≥ 2 est pair.

Le raisonnement par récurrence est l'un des outils le plus puissant qui soit en mathématiques. Rappelons qu'il consiste à considérer une propriété Pro(k) (par exemple «la somme des nombres impairs jusqu'à 2k+1 est le carré de k+1»), à démontrer Pro(1), puis Pro(k) => Pro(k+1) et à en déduire que pour tout entier k ≥ 1 la propriété Pro(k) est vraie.
Dans notre exemple Pro(1) est l'affirmation que «la somme des nombres impairs jusqu'à 3 est 2^2» qui est évidente (car 1+3 = 4). L'implication Pro(k) => Pro(k+1) se démontre, elle, en écrivant :

$$\begin{aligned} 1+3+\ldots+(2k+1)+(2k+3) &= (k+1)^2+2k+3 \quad \text{(on utilise Pro(k))} \\ &= (k+1)^2+2(k+1)+1 \\ &= (k+1+1)^2 \\ &= (k+2)^2 \end{aligned}$$

La conclusion est donc :
pour tout entier k ≥ 1 : $1+3+\ldots+(2k+1) = (k+1)^2$
(Parfois au lieu de partir de 1, on commence à 0 ou à l'entier m ; la conclusion est alors : pour tout entier k ≥ m : Pro(k))
Venons-en maintenant à notre piège : nous allons montrer par récurrence la propriété suivante :
Si E est un ensemble fini de nombres comprenant 2 alors E ne contient que des nombres pairs et donc tout nombre est pair.
Raisonnons sur le nombre k d'éléments de E. Précisément, montrons par récurrence que la propriété Pro(k) est vraie pour tout k ≥ 1 :
Pro(k) : tout ensemble de k éléments contenant 2,
ne contient que des nombres pairs.

- Si k=1, c'est vrai car alors E ne contient qu'un élément, 2, qui est pair et donc E ne contient que des nombres pairs.
- Supposons que Pro(k) est vraie et montrons Pro(k+1).

Soit un ensemble E ayant k+1 éléments et contenant 2. Soient deux parties A et B différentes l'une de l'autre, contenues dans E, chacune ayant 2 pour élément et ayant chacune k éléments. Puisque chacune contient k éléments dont 2, d'après l'hypothèse de récurrence (Pro(k)), chacune ne contient que des nombres pairs.

Leur réunion, E, ne contient donc que des nombres pairs (car la réunion de deux ensembles ne contenant que des nombres pairs ne contient bien sûr que des nombres pairs).

Le raisonnement par récurrence est terminé et donc :
Pro(k) est vraie pour tout k ≥ 1.

Puisque tout ensemble fini contenant 2 ne contient que des nombres pairs, tout ensemble de la forme {2,3,..., n} ne contient que des nombres pairs, donc tout nombre ≥ 2 est pair :
tout nombre ≥2 est pair

Où est l'erreur ?

e-mail: delahaye@lifl.fr