

## Petite rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

par **Jean-Paul Delahaye**

Professeur d'informatique à l'Université des Sciences et Technologies de Lille

Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille,  
UPRES A, CNRS 8022, Bât M3  
e-mail : delahaye@lil.fr

Les **paradoxes** sont un stimulant intellectuel qui ont été à l'origine de nombreux progrès mathématiques ou logiques, mais notre but dans cette rubrique sera uniquement de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une explication du paradoxe que je vous propose, envoyez-la moi (par courrier au service culture de l'USTL).

*Dans le prochain numéro d'Archimède les meilleures solutions seront proposées.*

### Bien ranger son argent

Maintenant que l'espérance de vie augmente et qu'on envisage même de faire des clones qui serviraient de banque d'organes permettant, pourquoi pas, de nous rendre éternel, de nouveaux problèmes se posent pour la gestion de nos économies.

En effet, deux personnes gagnant un somme identique chaque jour et en dépensant la même proportion chaque jour, même si elles n'utilisent que leur grenier pour cacher leurs économies peuvent se retrouver à terme dans des situations très différentes.

Précisons tout cela.

Julie et Jacques, chaque jour, gagnent deux pièces d'or et en dépensent une.

Julie procède de la façon suivante pour gérer son argent :  
Le jour numéro  $n$  elle gagne deux pièces que nous noterons  $P_n$  et  $Q_n$ . Elle place  $P_n$  dans son grenier et prend  $Q_n$  qu'elle dépense. Le premier jour la pile de pièces de son grenier est  $[P_1]$ , le second jour  $[P_1, P_2]$  le troisième  $[P_1, P_2, P_3]$ , etc

Jacques lui, craignant l'usure du temps, préfère faire circuler ses pièces et donc trouve plus malin de procéder ainsi :  
Chaque jour il place sous la pile des pièces de son grenier les deux pièces qu'il vient de gagner  $P_n$  et  $Q_n$ , et prend la pièce qui se trouve au-dessus de la pile, pièce qu'il dépense.

Le premier jour sa pile est donc  $[Q_1]$  (il a placé  $P_1$  et  $Q_1$  dans sa pile de pièces et s'est servi). Le second jour sa pile est devenue  $[P_2, Q_2]$  (il a ajouté les deux nouvelles  $P_2$  et  $Q_2$  pièces sous la pile, ce qui lui a donné  $[Q_1, P_2, Q_2]$  et s'est servi au-dessus). Le troisième jour sa pile est devenue  $[Q_2, P_3, Q_3]$ , puis le quatrième  $[P_3, Q_3, P_4, Q_4]$  puis le cinquième  $[Q_3, P_4, Q_4, P_5, Q_5]$ , etc.

A la fin des temps, bien qu'ayant gagné et dépensé la même chose chaque jour, Julie sera infiniment riche et Jacques sera totalement ruiné.

En effet, Julie, à la fin des temps, disposera dans son grenier des pièces  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  soigneusement économisées chaque jour.

Jacques, de son côté, n'aura rien car chaque pièce qu'il aura placée dans sa pile aura été dépensée. On peut même préciser :

la pièce  $P_n$  placée dans la pile le jour numéro  $n$  aura été dépensée le jour  $2n - 1$ , et la pièce  $Q_n$ , elle aussi placée dans la pile le jour numéro  $n$ , aura été dépensée un peu plus tard le jour  $2n$ . Chaque pièce finit par être dépensée, donc au final il ne reste rien à Jacques.

N'est-ce pas absurde (et injuste) que gagnant et dépensant la même chose Julie soit devenue infiniment riche et Jacques totalement ruiné !  
Qu'en pensez-vous ?

