

Anamorphose catoptrique à l'aide d'un miroir sphérique concave d'une image dessinée sur un cylindre

Francesco De Comité

Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille
Université des Sciences et Technologies Lille (France)

Francesco.De-Comite@univ-lille1.fr

19 avril 2010

Résumé

On définit le principe des anamorphoses à l'aide de miroirs sphériques concaves placés au fond d'un cylindre. L'analyse mathématique du problème conduit à des équations permettant de calculer les images transformées. On peut alors écrire l'algorithme qui transforme cette image, l'imprimer, la coller sur un cylindre et obtenir finalement une version réelle du dispositif. N'ayant pas trouvé ou construit (pour l'instant) de miroirs sphériques concaves, on se *contente* de réalisations en image de synthèse.

Introduction

L'anamorphose catoptrique est l'art de peindre un dessin apparemment sans signification, qui, lorsqu'il sera vu par l'intermédiaire d'un miroir, r v lera son véritable sens. Depuis le début de la Renaissance, peintres, artistes et scientifiques se sont penchés sur le problème, et les anamorphoses dans des miroirs coniques ou cylindriques sont connus depuis cette époque.

Dans ces anamorphoses, le dessin caché est souvent, si ce n'est pas toujours, inscrit sur un plan. L'analyse mathématique de ces configurations est connue depuis longtemps[2].

On propose ici un autre dispositif : le miroir se trouve au fond d'un cylindre, le dessin caché est inscrit sur les parois de ce même cylindre. Le dessin se révèle donc au spectateur lorsque celui-ci regarde au fond du cylindre, à la verticale.

Différentes formes de miroirs ont été testées et étudiées (sphérique, conique, sphérique concave, paraboloidal, paraboloidal concave), soit analytiquement, soit en utilisant des outils informatiques, et font ou feront l'objet d'autres publications.

On se propose ici d'étudier analytiquement le cas du miroir sphérique concave, et de mener les calculs qui permettent, à partir d'une image donnée, de calculer et d'imprimer son image transformée, pour ensuite la placer sur un cylindre, et l'observer à travers le miroir.

Des simulations numériques, à défaut de pouvoir disposer d'un tel miroir, valideront le raisonnement et les calculs.

Le dispositif

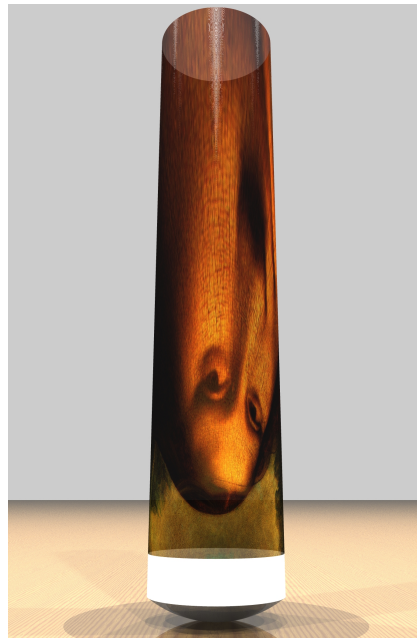


FIG. 1 – Une vue générale du dispositif : le dessin transformé est imprimé sur le cylindre semi transparent. L'image rétablie ne se révèle que lorsqu'on se place à la verticale du verre (image de synthèse obtenue avec Povray).

On considère un cylindre vertical creux de rayon l et de hauteur h , au fond duquel se trouve un miroir sphérique concave, de rayon R (figures 1 et 2).

Pour comprendre comment fonctionne l'anamorphose, on peut imaginer qu'on intercale le dessin qu'on veut pouvoir observer dans le miroir entre l'œil du spectateur et le miroir, de telle façon que ce dessin recouvre le miroir le plus exactement possible.

Il suffit alors de faire passer un rayon lumineux par chaque point du dessin, et d'observer où se situe sa réflexion sur le cylindre (quand elle existe). A chacune de ces observations cor-

respondra un point du cylindre, et l'union de tous ces points nous donnera l'image transformée (figure 2).

Le cylindre étant une surface développable, il sera alors possible d'imprimer ce dessin transformé sur un rectangle que l'on pourra enrouler, afin d'observer l'anamorphose au fond du cylindre.

Actuellement, nous ne disposons pas de miroir sphérique concave, mais des simulations numériques, à l'aide d'un logiciel de lancer de rayons[1], nous permettent de vérifier et valider la démarche.

Soit un dessin circulaire placé entre l'œil de l'observateur et le miroir (figure 2). Chaque point de ce dessin peut être muni de coordonnées polaires $(u, \theta), 0 \leq u \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

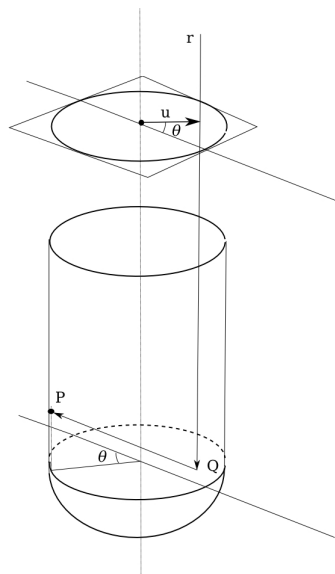


FIG. 2 – Le parcours du rayon lumineux, depuis sa traversée de l'image, jusqu'à son arrivée sur la paroi du cylindre, après réflexion sur le miroir.

Par rapport au système de coordonnées de la figure 3, la portion de cercle correspondant à la coupe du miroir sphérique a pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (1)$$

Plus précisément, puisqu'on n'observe que la partie basse de ce cercle coupée par le cylindre, on a le système :

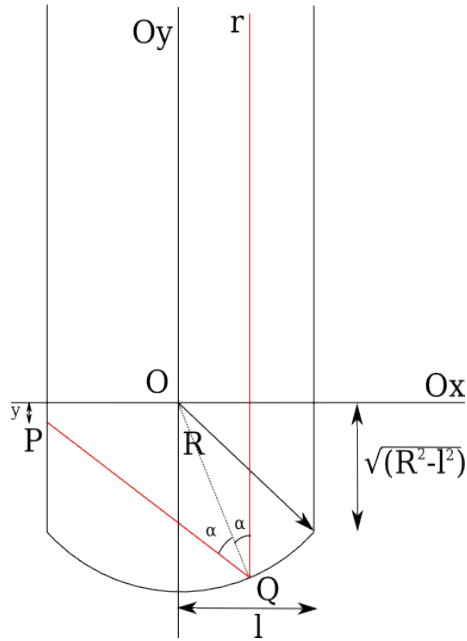


FIG. 3 – Le parcours du rayon lumineux, depuis sa traversée de l'image, jusqu'à son arrivée sur la paroi du cylindre, après réflexion sur le miroir, dans le plan du rayon et du rayon réfléchi.

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2} \quad (2)$$

$$|x| \leq l \quad (3)$$

Le rayon lumineux, situé à une distance u de l'axe vertical, rencontre le miroir au point :

$$Q(u, -\sqrt{R^2 - u^2})$$

Ce rayon fait un angle α avec la normale au miroir en ce point :

$$\sin(\alpha) = \frac{u}{R} \quad (4)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2}} \quad (5)$$

Le rayon réfléchi issu de Q rencontre le cylindre au point P , d'ordonnée y . Les rayons incident et réfléchi font entre eux un angle de 2α

On connaît la longueur d'un côté adjacent et du côté opposé à cet angle (le triangle PQV , où V est l'intersection du rayon incident avec la droite horizontale passant par P). Donc :

$$\tan(2\alpha) = \frac{l + u}{y + \sqrt{R^2 - u^2}} \quad (6)$$



FIG. 4 – Simulation du rendu de l’anamorphose (image réalisée avec Povray) : le résultat ‘parfait’ ne s’obtient que pour un observateur situé à l’infini. (Valeur des paramètres : $l = 3$ et $R = 8$).

En utilisant les égalités trigonométriques :

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} \quad (7)$$

On obtient finalement :

$$y = (l + u) \frac{R^2 - 2u^2}{2u\sqrt{R^2 - u^2}} - \sqrt{R^2 - u^2} \quad (8)$$

Contrairement à ce qui se passe pour le miroir paraboloidal concave, il est difficile ici de trouver la fonction inverse donnant u en fonction de y .

L’algorithme permettant de calculer l’image transformée à partir de l’image de base sera le suivant :

- Pour chaque point (x, y) de l’image de départ :
- Exprimer ce point en coordonnées polaires (par rapport au centre de l’image) : (u, θ)
- La largeur de l’image transformée mesurant $2\Pi l$, le calcul de $\theta\Pi l$ nous permet de calculer la colonne où devra se trouver l’image du point considéré.
- Calculer y en fonction de u à l’aide de l’équation 8
- Se servir de y pour trouver l’abscisse du point sur l’image déformée.

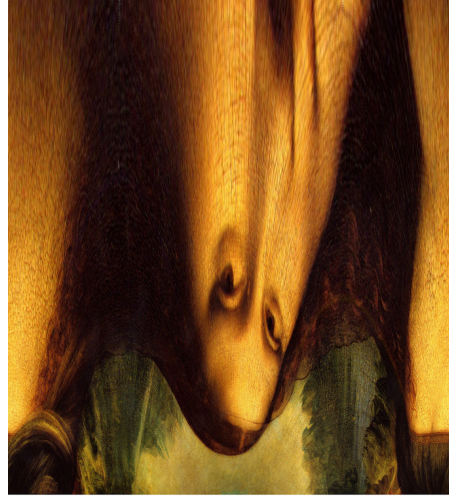


FIG. 5 – L'image transformée à imprimer et rouler sur un cylindre (pour $l = 3$ et $R = 8$).

Limites et remarques diverses

Comme pour le moment au moins, on ne sait pas inverser facilement l'équation 8, certains points du cylindre ne sont pas colorés, surtout dans les parties du dessin très déformées, laissant des lignes blanches visibles dans le haut de la figure 1. Si esthétiquement, c'est un peu gênant, du point de vue de l'anamorphose elle-même, ce n'est pas un problème, car ces défauts seront invisibles dans le reflet de cette image déformée.

On peut pallier plus ou moins à ce problème en incrémentant les point (x, y) de l'image de départ par des valeurs plus petites que 1, mais cela conduit à un ralentissement du programme.

Références

- [1] Pov-Ray website. <http://www.povray.org/>.
- [2] C. Randour and J. Drabbe. Miroirs et perspectives. <http://users.skynet.be/mathema/eng.htm>.