

Anamorphose catoptrique à l'aide d'un miroir paraboloidal concave d'une image dessinée sur un cylindre : application à la conception de verres à cocktail

Francesco De Comité

Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille
Université des Sciences et Technologies Lille (France)
Francesco.De-Comite@univ-lille1.fr

16 mars 2010

Résumé

On définit le principe des anamorphoses à l'aide de miroirs paraboloidaux concaves placés au fond d'un cylindre. L'analyse mathématique du problème conduit à des équations permettant de calculer les images transformées. On peut alors écrire l'algorithme qui transforme cette image, l'imprimer, la coller sur un cylindre et obtenir finalement une version réelle du dispositif. N'ayant pas trouvé ou construit (pour l'instant) de miroirs paraboloidaux, on se *contente* de réalisations en image de synthèse.

Introduction

L'anamorphose catoptrique est l'art de peindre un dessin apparemment sans signification, qui, lorsqu'il sera vu par l'intermédiaire d'un miroir, révélera son véritable sens. Depuis le début de la Renaissance, peintres, artistes et scientifiques se sont penchés sur le problème, et les anamorphoses dans des miroirs coniques ou cylindriques sont connus depuis cette époque.

Dans ces anamorphoses, le dessin caché est souvent, si ce n'est pas toujours, inscrit sur un plan. L'analyse mathématique de ces configurations est connue depuis longtemps[2].

On propose ici un autre dispositif : le miroir se trouve au fond d'un cylindre, le dessin caché est inscrit sur les parois de ce même cylindre. Le dessin se révèle donc au spectateur lorsque celui-ci regarde au fond du cylindre, à la verticale.

Différentes formes de miroirs ont été testées et étudiées (sphérique, conique, sphérique concave, paraboloidal, paraboloidal concave), soit analytiquement, soit en utilisant des outils informatiques, et font ou feront l'objet d'autres publications.

On se propose ici d'étudier analytiquement le cas du miroir paraboloidal concave, et de mener les calculs qui permettent, à partir d'une image donnée, de calculer et d'imprimer son image transformée, pour ensuite la placer sur un cylindre, et l'observer à travers le miroir.

Des simulations numériques, à défaut de pouvoir disposer d'un miroir paraboloidal, valideront le raisonnement et les calculs.

Le dispositif



FIG. 1 – Une vue générale du dispositif : le dessin transformé est imprimé sur le cylindre semi transparent. On distingue, au fond du verre, l'image rétablie. L'image exacte ne se révèle que lorsqu'on se place à la verticale du verre (image de synthèse obtenue avec Povray).

On considère un cylindre vertical creux de rayon l et de hauteur h , au fond duquel se trouve un miroir paraboloidal concave, de rayon l lui aussi, et de profondeur p (figures 1 et 2).

Pour comprendre comment fonctionne l'anamorphose, on peut imaginer qu'on intercale le dessin qu'on veut pouvoir observer dans le miroir entre l'œil du spectateur et le miroir, de telle façon que ce dessin recouvre le miroir le plus exactement possible.



FIG. 2 – Une vue générale du dispositif en contre-plongée. La limite supérieure de la zone vierge sur le cylindre correspond à l’altitude minimale des rayons réfléchis, obtenus en traçant la droite partant du bord du miroir et passant par le point focal de la parabole (image de synthèse obtenue avec Povray).

Il suffit alors de faire passer un rayon lumineux par chaque point du dessin, et d’observer où se situe sa réflexion sur le cylindre (quand elle existe). A chacune de ces observations correspondra un point du cylindre, et l’union de tous ces points nous donnera l’image transformée. Le cylindre étant une surface développable, il sera alors possible d’imprimer ce dessin transformé sur un rectangle que l’on pourra enrouler, afin d’observer l’anamorphose au fond du cylindre. Actuellement, nous ne disposons pas de miroir paraboloidal concave, mais des simulations numériques, à l’aide d’un logiciel de lancer de rayons[1], nous permettent de vérifier et valider la démarche.

Soit un dessin circulaire placé entre l’œil de l’observateur et le miroir (figure 3). Chaque point de ce dessin peut être muni de coordonnées polaires (u, θ) , $0 \leq u \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Soit un rayon lumineux vertical r passant par un point (u, θ) du dessin. Il est réfléchi en un rayon qui passera par le point focal du paraboloïde, et touchera la paroi du cylindre en un point P d’ordonnée y . Le rayon r et le point P sont dans le même plan vertical entièrement défini par l’angle θ .

La connaissance de θ et de $y = f(u)$ détermine de façon univoque la couleur de chaque

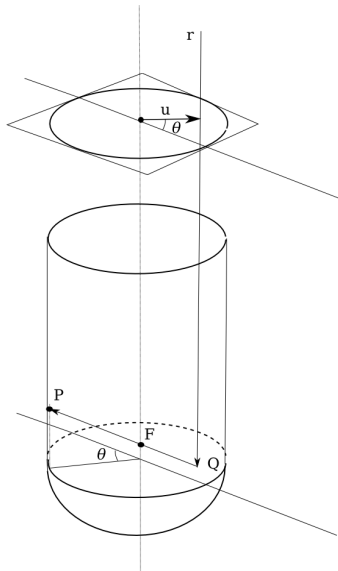


FIG. 3 – Le parcours du rayon lumineux, depuis sa traversée de l’image, jusqu’à son arrivée sur la paroi du cylindre, après réflexion sur le miroir.

point du cylindre. Il est alors facile de déplier le cylindre pour obtenir toutes les informations nécessaires à l’impression du dessin transformé.

Calcul de l’ordonnée du point image

On considère une section plane du dispositif par un plan passant par l’axe vertical et contenant le rayon r . Si l’origine des axes est fixée comme l’indique la figure 4 à la base du cylindre, alors la section du parabolöide est la parabole d’équation :

$$y = p\left(\frac{x^2}{l^2} - 1\right)$$

dont le foyer se trouve au point

$$F\left(0, \frac{l^2}{4p} - p\right)$$

Le rayon r rencontre le miroir au point

$$Q\left(u, p\left(\frac{u^2}{l^2} - 1\right)\right)$$

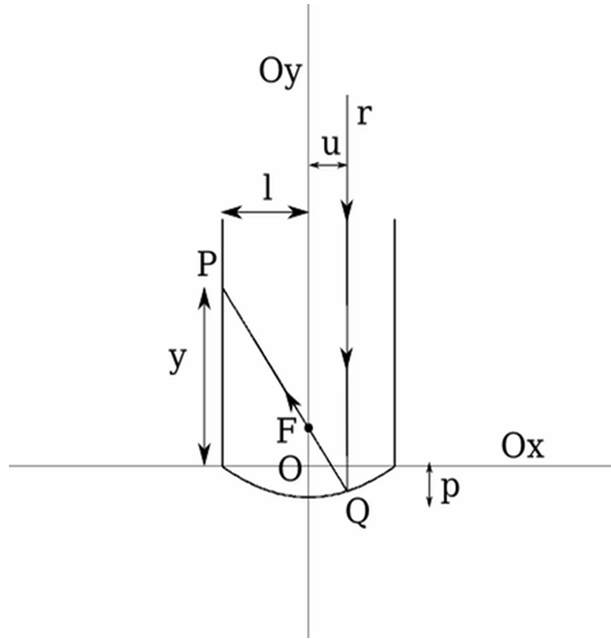


FIG. 4 – Le parcours du rayon lumineux vue en coupe dans son plan vertical.

Il faut maintenant calculer le point d'intersection de la droite verticale d'abscisse $-l$ (la paroi du cylindre du coté opposé au rayon r), et du rayon réfléchi, soit la droite passant par Q et le foyer F de la parabole.

La droite passant par Q et F a pour équation :

$$y = \left(p \frac{u}{l^2} - \frac{l^2}{4pu}\right)x + \frac{l^2}{4p} - p$$

Et donc, en remplaçant x par $-l$:

$$y = \frac{l^3}{4pu} - p \frac{u}{l} + \frac{l^2}{4p} - p \quad (1)$$

Si l'on suppose que l'on peut calculer l'abscisse d'un point sur le rectangle correspondant au cylindre développé, on a déjà, à partir d'ici, toutes les informations qui nous permettent d'écrire un algorithme dessinant l'image transformée :

- Pour chaque point (x, y) de l'image initiale :
 - Calculer $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{atan}(y/x)$
 - Calculer $ny = f(u)$ par l'équation 1
 - Calculer $nx = g(\theta)$

- couleur(nx,ny)=couleur(x,y)
- Fin de pour

l'inconvénient de cet algorithme, c'est que deux points voisins dans l'image initiale peuvent être très éloignés dans l'image transformée, ce qui est le cas pour les régions de l'image très déformées. Certains points du cylindre n'auront donc pas d'antécédent dans l'image initiale, ce qui se traduit par la présence d'artefacts sous forme de lignes 'sans couleurs'. On peut noter qu'au final, ces défauts ne sont pas trop graves : ils seront invisibles dans le reflet de l'image au fond du cylindre.

Néanmoins, on peut éviter ce problème en travaillant à l'envers : prendre un point sur le cylindre, et calculer son antécédent. Cela est possible si on peut inverser les deux fonctions $y = f(u)$ et $x = g(\theta)$.

Soient (X, Y) les coordonnées (en pixels) d'un point sur le cylindre développé, W, H respectivement la largeur et la hauteur de cette image (en pixels) et l le rayon du cylindre.

$$\theta = \frac{2\Pi}{l}X \quad (2)$$

$$y = Y \frac{2\Pi l}{W} \quad (3)$$

En utilisant Maple, on obtient u en fonction de y :

$$u = \frac{1}{8p^2}(-l\sqrt{(16p^2y^2 + (32p^3 - 8pl^2)y + 16p^4 + 8l^2p^2 + l^4) + 4lpy + 4lp^2 - l^3}) \quad (4)$$

qu'on peut diviser par l pour obtenir une valeur comprise entre 0 et 1.

θ et u sont alors les coordonnées polaires d'un point de l'image initiale, par rapport au centre de l'image. Il suffit alors de remettre à l'échelle pour trouver le point correspondant du tableau de pixel de dimension w, h :

$$x = \left(\frac{u}{l} \cos(\theta) + 1\right) \frac{w}{2} \quad (5)$$

$$y = \left(\frac{u}{l} \sin(\theta) + 1\right) \frac{h}{2} \quad (6)$$

w correspond à la circonférence du miroir et du cylindre, h à la hauteur du cylindre.

Limites et remarques diverses

Lorsque le point focal est trop bas (quand le paraboloïde est trop profond), le rayon réfléchi peut toucher une seconde fois le miroir, au lieu de toucher le cylindre. On observe alors une zone sans dessin en forme de couronne périphérique sur le miroir. La condition pour que le

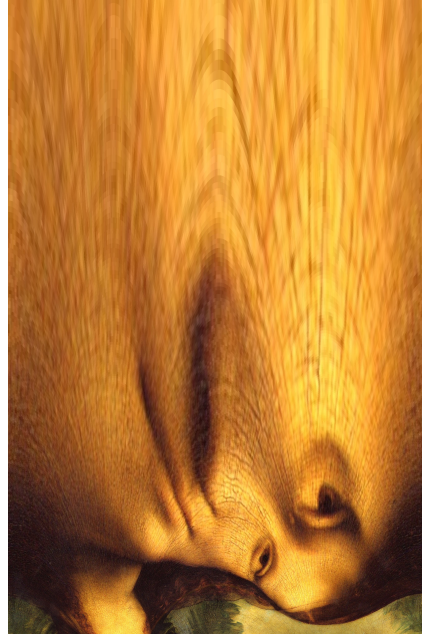


FIG. 5 – L'image transformée à imprimer et rouler sur un cylindre.

rayon r se réfléchisse bien sur le cylindre peut se déduire de l'équation 4 en posant $y = 0$, on obtient alors :

$$u \leq \frac{l^3}{4p^2} \quad (7)$$

On n'aura pas de problème de zone sans dessin si on est sûr que

$$\frac{l^3}{4p^2} \geq l \quad (8)$$

Soit encore

$$l \geq 2p \quad (9)$$

Une autre piste serait de calculer où le deuxième rayon réfléchi rencontre le cylindre, mais les calculs se compliquent nettement, en particulier parce que le deuxième rayon réfléchi ne passe plus par le point focal. . .

Petite remarque : placer une bille au point focal bloque tous les rayons réfléchis, et fait donc disparaître l'image au fond. . .



FIG. 6 – Le dispositif complet vu de loin (donc à peu près à l'infini. . .)

Conclusion

L'analyse mathématique a pu être conduite jusqu'au bout, grâce aux propriétés des paraboles, et les simulations numériques valident le raisonnement. Il ne reste plus qu'à trouver les bons miroirs. . .

Un raisonnement similaire peut être mené pour les miroirs sphériques concaves, il fera l'objet d'un autre papier. L'intérêt des miroirs concaves au fond des verres à cocktails, par rapport aux miroirs convexes, c'est que c'est plus facile à nettoyer, il ne reste pas de crasses inaccessibles à l'endroit où le miroir et le cylindre se rencontrent.

Références

- [1] Pov-Ray website. <http://www.povray.org/>.
- [2] C. Randour and J. Drabbe. Miroirs et perspectives. <http://users.skynet.be/mathema/eng.htm>.



FIG. 7 – Le dispositif complet vu de près : la distorsion est importante.