Jean-Paul Delahaye

Le tsunami du *Sudoku*

J'aime les chiffres, je les adore, j'en suis malade : il me faut au moins cinq grilles par jour. Est-ce grave docteur ?

Un jeu de pure logique, susceptible de vous fâcher avec vos proches quand vous refusez d'interrompre vos parties, ne peut séduire, croit-on, qu'un nombre très réduit de gens : mathématiciens, informaticiens ou ludomanes maniaques. Or son extravagant succès prouve qu'il n'en est rien : le *Sudoku* est partout ! Cet étrange et improbable phénomène social, un jeu de raisonnement qui a submergé tous les continents en quelques mois, rappelle le succès du cube de Rubik : au début des années 1980, il devint une passion pour des centaines de millions de personnes. Dédié à ceux qui ont encore échappé à l'engouement du *Sudoku* et aux aficionados qui souhaitent en apprendre plus sur ce nouveau jeu, voici un article sur le sujet dont nous contribuons ainsi à « étendre les ravages ».

Japon ou États-Unis ?

Le nom *Sudoku* utilisé en occident provient des mots japonais *Su* = nombre et *Doku* = seul. Or ce jeu est nommé le plus souvent *Number Place* au Japon : il a ainsi, en Orient comme en Occident, le charme des curiosités exotiques !

Les règles en sont simplissimes. Une grille carrée de 81 cases est divisée en 9 carrés plus petits de 9 cases chacun ; nous les nommerons les sous-carrés. Dans certaines des 81 cases, des chiffres sont inscrits au début de la partie. Il faut remplir les cases vides, en utilisant les chiffres de 1 à 9, de façon qu'aucun chiffre n'apparaisse deux fois dans la même ligne, ou deux fois dans la même colonne, ou deux fois dans le même sous-carré.

Selon les canons du *Sudoku*, la solution doit être unique. La figure 2 propose quatre *Sudokus* : l'un de niveau facile, le second de niveau moyen, le troisième de niveau difficile, et le dernier... diabolique. Remarquez qu'aucune opération (addition, multiplication ou autre) n'est utile à la résolution d'un *Sudoku*. On pourrait remplir les grilles avec neuf symboles différents autres que des chiffres (lettres, couleurs, petits dessins, etc.). Plus qu'un jeu de chiffres, c'est un jeu de combinaisons et pour y réussir il ne faut qu'une logique implacable et obstinée (certaines techniques de résolution sont explicitées figure 4).

Les premiers *Sudokus* furent publiés en mai 1979 à la page 6 du numéro 16 de la revue américaine *Dell Pencil Puzzles and Word Games* (Norwalk, Connecticut). Leur auteur est sans doute Howard Garns un architecte à la retraite, mort en 1989 (ou en 1981, les sources divergent !) à Indianapolis, sans avoir pu assister au succès récent, mais planétaire, de son invention. Garns, ainsi que les premiers auteurs de grilles de *Sudoku*, composaient leurs énoncés à la main.

Avant son entrée dans le cercle étroit des jeux que les quotidiens publient régulièrement dans leurs colonnes, le

2. Quatre grilles pour se faire la main

	2	6	4	5	8	3		
1	7						4	
	8							
						9	8	
			5	9		1		4
7			2		1		5	
				4			3	
			8			5		
6					7		9	1

Facile

9			6	3				4
	1		2	5	8			
			7					8
6	4			2		5		
8	2		5				9	
						8	7	
3					5		4	
		1		7	6			

Moyen

								7
						6	3	4
			9	4			2	
5		1	7			8	6	
		9						3
				8				
4	3		5					
	1			6	8			
					3	1		9

Difficile

				3				
	1	5				6		
6			2			3	4	
			6				8	
	3	9				5		
5						9		2
			9	7		2	5	
1				5			7	

Diabolique

Voici quatre grilles de niveaux progressifs pour que vous puissiez prendre goût à la résolution de *Sudokus*. Le jeu consiste à remplir les grilles avec les chiffres de 1 à 9, sans qu'un même chiffre se trouve plus d'une fois dans une même colonne, une même ligne ou un même sous-carré. Les solutions des quatre grilles sont données sur la figure 7.

	9	8						
				7				
				1	5			
1								
			2					9
			9		6		8	2
							3	
5		1						
			4				2	

7	9	8	6	2	4	3	1	5
3	1	5	8	7	9	2	4	6
2	6	4	3	1	5	9	7	8
1	2	9	5	8	7	4	6	3
6	8	3	2	4	1	7	5	9
4	5	7	9	3	6	1	8	2
9	4	2	1	5	8	6	3	7
5	3	1	7	6	2	8	9	4
8	7	6	4	9	3	5	2	1

1. Rosa Bonheur (1822-1899) dans son atelier : sur le faux tableau et aussi à droite, un des *Sudokus* comportant le moins de chiffres (17), donc difficile, avec sa solution.

Sudoku fut pratiqué au Japon où il prit le nom qui lui est resté... dans les pays occidentaux. Son succès est l'œuvre de Wayne Gould, un juge néo-zélandais, lui aussi à la retraite et résidant à Hongkong. Il mit au point un programme permettant d'engendrer automatiquement des grilles d'énoncés. Fin 2004, le *Times* accepte sa proposition de publier des problèmes de *Sudoku*, puis, en janvier 2005, le *Daily Telegraph* en insère aussi. Depuis, plusieurs dizaines de quotidiens dans tous les pays du monde ont publié des grilles, certains les plaçant même en première page et les utilisant comme argument publicitaire. Journaux spécialisés et livres de problèmes ont suivi.

Accoutumance et dépendance

Ceux qui essaient ce jeu y prennent vite goût et parfois en deviennent obsédés ne pouvant plus se retenir d'y jouer (attention à votre gestion du temps : sur *Internet* vous trouverez plus de grilles que vous ne pourrez jamais en résoudre !). L'auteur de cet article, voulant savoir de quoi il parlait, s'est essayé au jeu. Pris par le désir de progresser, il a éprouvé accoutumance et dépendance, jusqu'à abandonner à regret (et temporairement) les parties... de façon à finir cet article. L'attrait obsessionnel engendré par ce jeu provient sans doute de la façon dont se déroule une partie.

Les premiers chiffres sont les plus difficiles à poser, mais chaque nouvelle case remplie rend la solution plus proche et apparemment plus facile. À mesure du déroulement de la partie, le jeu s'accélère. Parfois cependant, on se retrouve bloqué malgré un petit nombre de cases vides ; on s'en veut de ne pas réussir à liquider la grille ; cela provoque une frustration et donc une concentration accrue et un désir plus intense de triompher du carré maudit ; à ce stade, il devient dangereux d'interrompre le joueur. La fin du remplissage de la grille procure au joueur une satisfaction et un soulagement, qui, bien sûr, l'incite à rechercher une nouvelle grille pour recommencer. Les progrès qu'on fait sont un autre encouragement à s'essayer à d'autres grilles de *Sudoku*... jusqu'à en rêver la nuit.

Les ancêtres

Le jeu est un bon entraînement au raisonnement abstrait et, à ce titre, il peut être utilisé dans les classes de mathématiques où il pourrait convaincre de l'attrait de la logique pure. Les professeurs ne seront pas gênés par les élèves qu'ils auront contaminé par le virus du *Sudoku*, car il est difficile d'imaginer un jeu plus calme.

3. Carrés latins et *Sudokus*

a

1	2
2	1

b

1	2	3
2	3	1
3	1	2

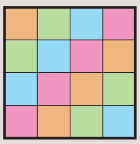
c

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

d

*	%	#	○
%	#	○	*
#	○	*	%
○	*	%	#

e



f

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4

g

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

h

5	8	6	4	2	1	3	7	9
3	2	7	9	6	5	4	8	1
9	1	4	3	7	8	6	2	5
1	6	3	5	8	4	7	9	2
2	4	5	1	9	7	8	6	3
8	7	9	6	3	2	5	1	4
7	5	8	2	1	3	9	4	6
6	3	1	7	4	9	2	5	8
4	9	2	8	5	6	1	3	7

Les carrés latins sont des dispositions en carré des permutations de *n* symboles. *(a, b et c)* carrés latins d'ordre 2, 3 et 4. *(d et e)* carré latin d'ordre 4 avec des symboles et des couleurs. *(f et g)* carrés latins d'ordre 5 et 6. *(h)* Grille de *Sudoku*, un carré latin d'ordre 9 où les permutations sont telles que chacun des neuf sous-carrés contient les nombres de 1 à 9.

Certains affirment que le *Sudoku* ralentit la progression de la maladie d'Alzheimer ; je ne sais si cette affirmation doit être prise au sérieux, mais c'est à toute vitesse que le cerveau du joueur expérimenté examine les combinaisons de chiffres. Cela fait certainement travailler un bon nombre de neurones et constitue un sérieux exercice pour la machine cérébrale.

L'ancêtre du *Sudoku* n'est pas comme on le dit parfois le carré magique avec lequel il n'a pas grand-chose à voir (sinon des chiffres et une grille), mais le carré latin. Un carré latin de côté n est un carré de n^2 cases, remplies à l'aide de n symboles de façon qu'un même symbole n'apparaisse jamais deux fois dans la même ligne, ou deux fois dans la même colonne (chacun des n symboles est donc utilisé n fois exactement). Leur origine remonte au Moyen Âge, et le mathématicien Euler (1707-1783), les baptisa carrés latins et les étudia. Il n'y a que 12 carrés latins de côté 3, mais 576 de côté 4 et 5 524 751 496 156 892 842 531 225 600 de côté 9. Si on décide que des carrés latins déductibles les uns des autres par des opérations élémentaires (permutation des lignes et des colonnes) ne doivent être comptés qu'une seule fois, le nombre de carrés latins de côté 9 est 377 597 570 964 258 816 (résultat établi par S. Bammel et J. Rothstein en 1975).

Une formule générale assez compliquée a été trouvée en 1981 par J. R. Nechvatal qui indique le nombre $L(n)$ de carrés latins à n cases de côté. Cependant, cette formule pour $L(n)$ et d'autres similaires ne permettent pas de déduire la valeur asymptotique (ordre de grandeur quand n devient très grand) de cette quantité qui reste donc inconnue aujourd'hui.

Autant de *Sudokus* que d'humains

Par définition, une grille de *Sudoku* complète est un carré latin satisfaisant la condition supplémentaire que chacun des neuf sous-carrés de 9 cases contient tous les chiffres de 1 à 9 : ces grilles sont donc moins nombreuses que les carrés latins d'ordre 9. Leur dénombrement précis est assez difficile. Aujourd'hui seule l'utilisation du raisonnement – pour simplifier le problème – et de l'ordinateur – pour examiner systématiquement les cas – a permis de compter le nombre de grilles complètes de *Sudoku* : 6 670 903 752 021 072 936 960 si l'on compte plusieurs fois les grilles se déduisant les unes des autres par des opérations élémentaires (rotations, symétries, permutations des 3 premières colonnes, des 3 premières lignes, etc.). Ce résultat récent de Bertram Felgenhauer et Frazer Jarvis a été vérifié par Ed Russell (ce qui importe pour un résultat obtenu de cette façon).

Quand on ne compte qu'une seule fois les grilles se déduisant les unes des autres par des opérations simples, le nombre de grilles complètes est légèrement inférieur au nombre d'humains sur la Terre (précisément : 5 472 730 538).

a

5		1					9	6
				9			5	
				●	5	2		7
4	9		1				7	
	●				7			
1	3	●					2	
3	●	4	●	5	9	●		●
●	2	8		7	1		4	
7	6	5	8	2				

Nous examinerons ici quatre méthodes pour avancer dans la résolution d'une grille de *Sudoku*.

Les méthodes 1 et 2 gagnent à être employées en même temps (un peu de l'une un peu de l'autre, etc.) et sont les plus rapides. Malheureusement, elles deviennent parfois impuissantes pour que nous puissions progresser dans une grille. Nous passerons alors à la méthode 3, et, si elle se révèle encore insuffisante, à la méthode 4 qui marche à tous les coups, mais est plus délicate. D'autres méthodes sont possibles que vous inventerez vous-même où que vous trouverez décrites sur les sites Internet spécialisés *(voir la bibliographie)*.

Méthode 1 : la case forcée

Vous considérez une case fixe. En observant les autres chiffres présents dans la même colonne, la même ligne ou le même sous-carré, vous découvrez qu'il ne reste qu'une seule possibilité. Vous remplissez donc la case. Bien sûr s'il reste plusieurs possibilités, vous ne pouvez pas remplir la case considérée.

Exemples : les cases marquées en rouge sur la figure *a* sont les cases forcées de la grille.

Méthode 2 : le chiffre forcé

Vous considérez un chiffre fixé. Par exemple le 5. Dans les colonnes 1 et 3, il y a déjà des 5, mais il n'y en pas dans la colonne 2 qui doit en contenir un. Où peut-il être ? Pas dans les 3 premières cases de la colonne 2, car le sous-carré en haut à gauche contient déjà un 5. Pas dans les trois dernières cases de la colonne 2, car le sous-carré en bas à gauche contient déjà un 5. Donc le 5 de la colonne 2 est dans l'une des cases 4, 5 ou 6 de cette colonne. Une seule est libre : un 5 est donc dans la cinquième case.

Exemples : les cases marquées par des points noirs de la figure *a* sont des chiffres forcés par des raisonnements de ce type.

En alternant l'utilisation de la méthode de la case forcée et celle du chiffre forcé qui sont complémentaires, vous réussirez déjà à résoudre certains *Sudokus*, et en tout cas vous avancerez assez rapidement pour les *Sudokus* de niveau facile et moyen.

Méthode 3 : Simplification des séries de possibilités

La méthode suivante est extrêmement puissante, mais demande de se munir d'un crayon et d'une gomme. Dans chaque case, vous écrivez en petit, ou en couleur, les chiffres encore possibles *(voir la figure b)*. Certains joueurs préfèrent utiliser des petits points dans les cases, qui selon leur emplacement représentent les chiffres de 1 à 9 : le 1 est représenté par un point en haut à droite, le 2 est représenté par un point en haut au milieu, etc.

Maintenant, toutes sortes de raisonnements sont à portée de main dont vous allez comprendre le principe sur un exemple :

Exemple. Dans la troisième colonne, la série des possibilités est {2,3,6,7}, {3,6,9}, {2,6}, {2,6} et {6,7} correspondant respectivement aux possibilités des cases 2, 3, 4, 5 et 6. La colonne doit contenir un 2 et un 6, ils sont donc nécessairement dans les deux cases dont les possibilités sont {2,6}. En conséquence, le 2 et le 6 ne sont nulle part ailleurs (dans cette colonne) et donc, peuvent être supprimés des autres cases : ce ne sont plus des possibilités pour les autres cases. La série des possibilités de la colonne se simplifie en : {3,7}, {3,9}, {2,6}, {2,6}, {7}. Mais ce n'est pas tout. L'emplacement du 7 étant imposé, celui du 3 aussi et donc celui du 9. Les possibilités sont donc finalement : {3}, {9}, {2,6}, {2,6}, {7}. Une seule incertitude persiste : celle de l'emplacement du 2 et du 6.

Ce décompte devrait cependant rassurer les amateurs de *Sudoku* qui n'ont pas à craindre la pénurie de problèmes : même à raison d'une grille résolue par minute, une vie de cent ans n'en épuisera à peine qu'un pour cent.

Il faut noter qu'une grille complète de *Sudoku* peut donner lieu à plusieurs grilles d'énoncés. Aujourd'hui d'ailleurs personne n'a réussi à compter combien il existe de grilles d'énoncés différentes. On peut considérer qu'une grille d'énoncé n'est intéressante que si elle ne peut pas être rendue « plus petite » – c'est une grille *minimale* – , c'est-à-dire que si elle possède la propriété suivante : dès qu'on enlève un chiffre de la grille d'énoncé, la solution n'est plus unique. Bien sûr, personne n'a évalué le nombre de grilles d'énoncés minimales. Ce nombre constitue l'ultime dénombrement des problèmes différents de *Sudoku* et gageons que, d'ici peu, le défi sera relevé.

Un autre problème de grille minimale est irrésolu aujourd'hui à propos du *Sudoku* : quel est le plus petit nombre de chiffres à placer dans une grille pour que la solution soit unique. On connaît des grilles satisfaisantes avec 17 chiffres au départ ; on n'en connaît pas avec 16, mais personne n'a prouvé pour l'instant qu'il n'en existait pas. Nous connaissons la solution (77) du problème opposé : « Quel est le nombre maximum de chiffres qu'on peut donner sans qu'il y ait unicité de la solution ? ». Il est très facile de voir qu'avec 80, 79 ou 78 données, s'il y a une solution, elle est unique. D'autre part la grille de la figure 5*b* montre que 77 données ne garantissent pas l'unicité.

On peut envisager des grilles de *Sudoku* de taille 4×4, 9×9 (*Sudoku* classique), 16×16, 25×25, et plus généralement de taille $n^2 \times n^2$: le carré de côté n^2 est divisé en n^2 sous-carrés égaux $n \times n$; on se donne n^2 symboles différents et l'on exige que sur une même ligne, une même colonne ou dans un même sous-carré, le même symbole n'apparaisse jamais en double.

Tout récemment Takayuki Yato et Takahiro Seta ont montré que le problème de la résolution des grilles de *Sudoku* de taille $n^2 x n^2$ est NP-complet. Cela signifie qu'il sera sans doute impossible d'écrire un programme de résolution efficace des *Sudoku* généralisés : pour tout programme le temps de résolution augmente si vite en fonction de n, que le programme devient incapable de traiter en temps raisonnable les problèmes qu'on lui soumet *(voir l'article de cette rubrique en août 2005)*. On s'en doutait un peu, mais savoir qu'une démonstration en bonne et due forme a été obtenue est satisfaisant... et sert de consolation quand on sèche sur une grille particulière !

Programmes

Pour les *Sudokus* standards (9x9), il est relativement aisé d'écrire des programmes informatiques qui viennent à bout de toutes les grilles d'énoncés (ces programmes sont d'ailleurs,

4. Les méthodes de résolution

Quand vous utilisez la méthode de simplification des possibilités n'oubliez pas que la série dont vous partez peut être, soit la série des possibilités des cases d'une même colonne, soit celle des cases d'une même ligne, soit celle des cases d'un même sous-carré. Cela fait 27 séries de possibilités simplifiables potentielles. Bien sûr les simplifications interagissent.

La formulation de la règle générale de simplification d'une série de possibilités est la suivante : si dans la série des possibilités (d'une ligne, d'une colonne, ou d'un sous-carré), on peut trouver *m* chiffres et *m* ensembles de possibilités correspondant à *m* cases et n'utilisant que ces *m* chiffres, alors ces *m* chiffres peuvent être supprimés des ensembles de possibilités des autres cases.

À titre d'entraînement exercez-vous à simplifier le plus possible ces suites de possibilités :

{1}, {1,2}, {2,3,4}, {1,2,3,4,5}, {1,2,4} (solution : {1}, {2}, {3}, {5}, {4})

{2,3}, {2,5}, {3,5}, {2,3,5,7,8,9}, {7,9}, {2,5,7} (solution : {2,3}, {2,5}, {3,5}, {8}, {9}, {7})

Muni des trois premières méthodes et des interactions que vous pourrez mettre en œuvre, une bonne proportion des grilles de *Sudoku* pourra être résolue, y compris certains *Sudokus* classés difficiles ou diaboliques.

Méthode 4 : Les tentatives (essai et erreur)

Parfois, il faut procéder par la méthode des tentatives, assez malcommode et demandant soit *(a)* une très forte concentration, soit *(b)* des crayons de plusieurs couleurs différentes, soit *(c)* la mise en œuvre de papiers calques, soit enfin *(d)* l'utilisation d'un logiciel d'aide à la résolution des *Sudokus*, qui vous permettra de placer des marques dans les cases et de les effacer. Les *Sudokus* de niveau diabolique exigeront assez fréquemment une telle phase d'exploration par tentatives. Lorsqu'une incertitude persiste, par exemple entre deux cases d'une même ligne dont les possibilités sont {2,6}, {2,6}, on teste ce que donne le placement du 6 dans la première case. On fait donc l'hypothèse que le 6 est dans la première des deux cases où il peut se trouver. On en tire toutes les conséquences possibles par application des autres méthodes ou même de la méthode par tentative, utilisée à l'intérieur d'elle-même. Si on tombe sur une impossibilité, c'est que le 6 n'est pas où l'on a essayé de le placer : il faut donc mettre le 2 qui est la seule alternative possible.

Si on ne découvre pas d'impossibilité ce qu'on trouve est la solution (car celle-ci est unique). La méthode des tentatives se fonde sur le principe du raisonnement par l'absurde.

La difficulté pratique de mise en œuvre de cette méthode provient du fait qu'il faut parfois faire plusieurs tentatives de suite, et être capable de revenir en arrière en cas d'impossibilités.

L'idée de la méthode des tentatives est la même que celle employée par les algorithmes de retour en arrière systématique *(backtracking)* que les programmes peuvent facilement mettre en œuvre, mais que notre mémoire, peu performante, a beaucoup de mal à appliquer.

Il est remarquable que ce qui est la méthode numéro un pour une machine est la dernière méthode pour un esprit humain. D'autres techniques existent et certains sites Internet les répertorient et les classent.

b

5	478	**1**	23 47	348	23 48	348	**9**	**6**
268	478	23 67	234 67	**9**	234 68	13 48	**5**	13 48
689	48	369	346	134 68	**5**	**2**	138	**7**
4	**9**	26	**1**	368	23 68	35 68	**7**	358
268	58	26	234 569	34 68	**7**	134 5689	13 68	134 589
1	**3**	67	45 69	468	468	456 89	**2**	45 89
3	1	**4**	6	**5**	**9**	16 78	168	128
9	**2**	**8**	36	**7**	**1**	35 69	**4**	359
7	**6**	**5**	**8**	**2**	34	139	13	139

5. Le meilleur *Sudoku* imparfait !

a

		3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
		4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

b

1 2	2 1	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2 1	1 2	4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

Plus grande grille fautive (77 cases indiquées en *a*) qui a deux solutions où quatre cases *(b)* sont différentes (indiquées en noir et en rouge).

comme on va le voir plus loin, au cœur des générateurs automatiques de grilles d'énoncé de *Sudoku*).

Plusieurs méthodes sont envisageables, mais la plus courante est celle du « retour arrière systématique » *(backtracking)*. L'idée est la suivante : le programme place le chiffre 1 dans la première case vide. Si ce choix est compatible avec les règles de base, il continue avec la seconde case vide où il place un 1, puis avec la troisième, etc. Lorsqu'il rencontre une incompatibilité (ce qui se produit très rapidement), il augmente le dernier chiffre placé d'une unité et repart en avant.

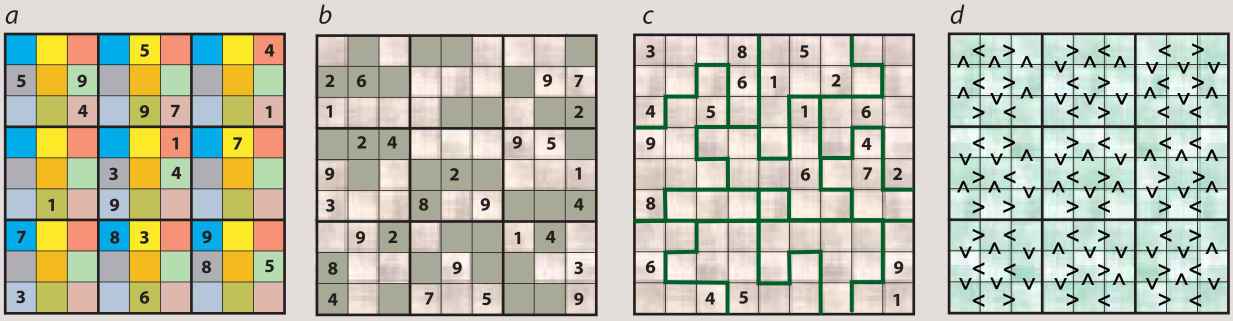
Si, en voulant monter d'une unité le dernier chiffre placé, il découvre que c'est un 9 (qu'on ne peut pas remplacer par un 10 !), alors il revient en arrière et augmente d'une unité l'avant-dernier chiffre placé, puis repart en avant, etc. (le programme revient parfois en arrière à plusieurs reprises avant de repartir en avant). Bien programmée, cette méthode explore toutes les hypothèses possibles sans en oublier une seule, et donc, finit par trouver la solution lorsqu'elle existe. En poursuivant son déroulement le programme trouve toutes les solutions s'il y en a plusieurs (cas d'un *Sudoku* imparfait).

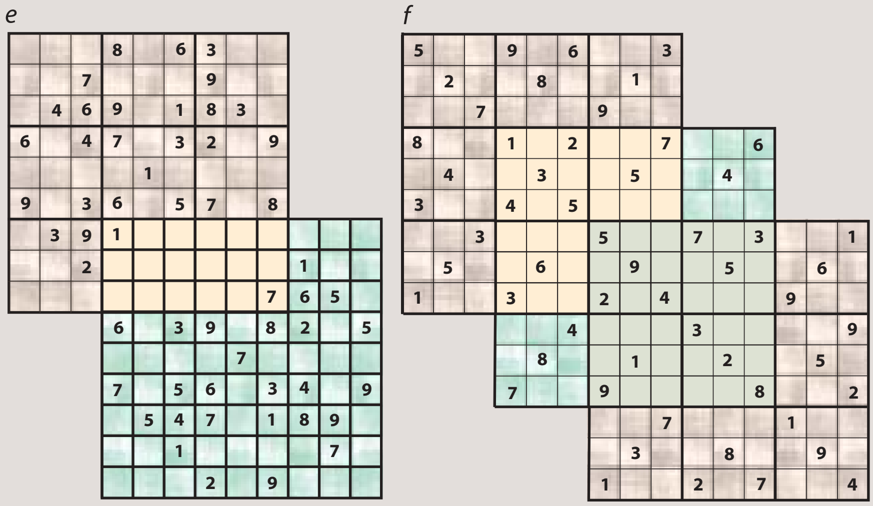
Bien sûr, des perfectionnements sont possibles accélérant la découverte de la solution unique ou des multiples solutions. En particulier, il y a le perfectionnement dit de la « propagation des contraintes » : après chaque chiffre nouvellement placé le programme met à jour le tableau des possibilités restantes de chaque case vide *(voir la figure 4, méthode 3)* et n'envisage de nouveaux chiffres que conformément à ce tableau.

Les techniques de retour en arrière systématique conduisent à des programmes de résolution assez courts. Le langage *Prolog*, langage inventé en France par Alain Colmerauer et Philippe Roussel dans les années 1970, est particulièrement adapté à l'écriture de programmes de résolution des grilles de *Sudoku*, car il contient dans ses mécanismes de base un algorithme de « retour arrière systématique ». En *Prolog*, il existe des programmes d'une centaine de lignes qui résolvent assez efficacement tous les *Sudokus* 9x9.

Les techniques de retour en arrière systématique ne sont pas applicables par les joueurs humains (ou alors il leur faut vraiment une patience hors du commun). Les joueurs humains utilisent donc des règles plus variées et plus astucieuses *(voir la figure 4)* et ne mettent en marche les méthodes par tentatives (équivalentes au *backtracking*) qu'en dernier recours.

6. Variantes de *Sudokus*





Variantes. *(a)* mêmes règles qu'habituellement, mais, en plus, deux cases de la même couleur ne doivent pas contenir le même chiffre. *(b)* les cases grisées doivent contenir des chiffres pairs et les autres des chiffres impairs. *(c)* les 9 sous-carrés ont été remplacés par des formes découpées. *(d)* aucun chiffre n'est donné, mais entre les cases un symbole < ou > indique lequel des deux chiffres doit être le plus grand. Je n'ai pas la solution de ce problème paru dans la revue *Puzzler* en 1999. Quelqu'un le résoudra-t-il ? *(e* et *f)* la grille est composée de deux et trois grilles chevauchantes, chacune soumise aux règles habituelles.

7. Solutions des grilles de la figure 2

a

9	2	6	4	5	8	3	1	7
1	7	3	9	6	2	8	4	5
4	8	5	1	7	3	2	6	9
5	6	1	7	3	4	9	8	2
8	3	2	5	9	6	1	7	4
7	9	4	2	8	1	6	5	3
2	1	9	6	4	5	7	3	8
3	4	7	8	1	9	5	2	6
6	5	8	3	2	7	4	9	1

b

9	5	8	6	3	1	7	2	4
7	1	4	2	5	8	9	6	3
2	3	6	7	9	4	1	5	8
6	4	3	8	2	9	5	1	7
1	9	5	4	6	7	3	8	2
8	2	7	5	1	3	4	9	6
5	6	9	3	4	2	8	7	1
3	7	2	1	8	5	6	4	9
4	8	1	9	7	6	2	3	5

c

8	2	4	3	5	6	9	1	7
7	9	5	8	1	2	6	3	4
1	6	3	9	4	7	5	2	8
5	4	1	7	3	9	8	6	2
6	8	9	1	2	4	7	5	3
3	7	2	6	8	5	4	9	1
4	3	8	5	9	1	2	7	6
9	1	7	2	6	8	3	4	5
2	5	6	4	7	3	1	8	9

d

2	7	4	5	3	6	1	9	8
3	1	5	4	8	9	6	2	7
6	9	8	2	1	7	3	4	5
4	2	1	6	9	5	7	8	3
7	3	9	1	2	8	5	6	4
5	8	6	7	4	3	9	1	2
9	5	7	8	6	2	4	3	1
8	4	3	9	7	1	2	5	6
1	6	2	3	5	4	8	7	9

Certains programmes ont aussi été écrits qui tentent de suivre de près les méthodes humaines : ils sont plus longs que les autres, mais aussi efficaces. Ces programmes, simulant le raisonnement humain, sont utiles pour mesurer la difficulté des grilles d'énoncés : selon les principes de raisonnement qu'il faut mettre en œuvre pour venir à bout d'une grille, elle est classée facile, moyenne, difficile ou diabolique.

Alors qu'à la naissance du jeu, les grilles étaient fabriquées à la main, elles le sont maintenant presque toutes par des programmes qui fonctionnent selon l'idée suivante : on place des chiffres au hasard sur une grille et l'on applique un algorithme de résolution (de type *backtracking* par exemple). Si la grille possède une solution unique, c'est terminé. Si la grille partielle aléatoire ne possède pas de solution, on lui enlève un chiffre et l'on recommence. Si elle en possède plusieurs, on en choisit une et l'on ajoute (en appliquant l'algorithme) à la grille partielle autant de chiffres nouveaux nécessaires pour que la solution choisie devienne unique.

Notons que le problème de la résolution d'une grille de *Sudoku* est équivalent à celui du coloriage d'un graphe où deux nœuds reliés par une arête ne portent jamais la même couleur. Il y neuf couleurs disponibles. Le graphe comporte 81 nœuds (chacun correspondant à une case) dont certains sont coloriés au départ. Il y a 810 arêtes car chaque case est reliée aux 8 de la même colonne, aux 8 de la même ligne et aux 8 du même sous-carré (dont 4 ont déjà été comptés), ce qui fait donc un total de [(8+8+4)x81]/2 = 810.

Méthodes de résolution et variantes

Venons-en maintenant à l'art de la résolution des *Sudokus* à la main, art devenu l'obsession de millions de passionnés aujourd'hui. Il est souhaitable de le découvrir soi-même et de ne s'informer des recettes qu'après avoir expérimenté le jeu un moment. On peut d'ailleurs se fixer le principe de n'utiliser que des méthodes qu'on aura mises au point soi-même.

Cependant pour ceux qui ne savent pas comment débuter voici deux principes élémentaires. Le premier consiste à rechercher les cases vides les plus contraintes : celles qui appartiennent à une ligne déjà bien remplie, ou à une colonne bien remplie ou à un sous-carré bien rempli. Avec un peu de chance les impossibilités cumulées (du type : la case ne peut pas contenir un 1, un 3 ou un 7, car il y a déjà un 1, un 3 et un 7 dans la même colonne) forceront sa valeur *(voir des exemples à la figure 4 ; méthode de la case forcée)*.

Le second principe consiste à chercher où peut se trouver un chiffre donné dans une colonne, une ligne ou une case donnée (par exemple le 3 dans la ligne 4). La question n'aura parfois qu'une réponse possible et donc vous poserez le chiffre choisi *(voir la figure 4, méthode du chiffre forcé)*.

Toutes sortes de raisonnements qu'on découvre soi-même en pratiquant le jeu s'offrent au joueur et le plaisir est à la fois de les découvrir et d'apprendre à les maîtriser à toute vitesse pour faire avancer rapidement les grilles.

Certains logiciels (faciles à trouver sur Internet) engendrent des grilles du niveau de difficulté que vous voulez et vous assistent dans la recherche des solutions (sans bien sûr résoudre la grille !). Par exemple, certains permettent d'inscrire des marques temporaires dans les cases, et de les effacer, dispensant ainsi de l'utilisation de crayon et de la gomme. Certains permettent même de faire apparaître des liens entre cases. Il ne faut pas s'interdire ces logiciels qui, en vous libérant des certaines tâches pénibles (le gommage par exemple), vous incitent au contraire à plus de subtilité et de virtuosité dans les raisonnements combinatoires que vous mettrez en œuvre.

Lorsque vous serez lassé des grilles traditionnelles, vous pourrez partir à la recherche des variantes du *Sudoku*, qui sont innombrables : certaines font se chevaucher plusieurs grilles, d'autres proposent de remplacer les sous-carrés par d'autres structures, d'autres introduisent des couleurs. La figure 6 en présente quelques-unes. L'intérêt de ces variantes est qu'elles obligent sans cesse à découvrir de nouveaux raisonnements. De plus, un passionné qu'une grille traditionnelle n'occupe qu'un quart d'heure, pourra avec les versions géantes du *Sudoku* s'immerger une journée entière dans les délices des combinaisons de cases et de chiffres. Mais, assez bavardé, retournons voir si la prochaine grille résistera...

Auteur & Bibliographie

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

Encyclopédie Wikipedia, *Sudoku*, 2005 : http://en.wikipedia.org/wiki/*Sudoku*.

A Variety of Sudoku *Variants*, 2005 : http://www.sudoku.com/forums/viewtopic.php?t=995

Sudoku Variant, 2005 : http://sudokuvariants.blogspot.com/techniques, 2005.

http://www.simes.clara.co.uk/programs/sudokutechniques.htm

How to solve ? 2005 : http://www.sudoku.com/howtosolve.htm

SOURENDU GUPTA, *Exploring the Mathematics of Sudoku*, 2005 http://theory.tifr.res.in/ffsgupta/sudoku/