Automatic Continued Fractions Expansions by *Guess and Prove*

Sébastien Maulat, ÉNS de Lyon
Bruno Salvy, INRIA

JNCF, CIRM

Novembre 2014

Algorithmisation des fonctions spéciales

Une description générique : D-finitude

- équa-diffs linéaires, à coefficients polynomiaux (en x),
- et récurrences linéaires, à coefficients polynomiaux (en n).

De nombreux algorithmes (paquet maple *gfun*) :
[Salvy Zimmermann 1994], [Mezzarobba 2010]

- développements de Chebyshev,
- transformations intégrales,
- bornes d'erreurs de troncatures (Taylor), ...

Algorithmisation des fonctions spéciales

Une description générique : D-finitude

- équa-diffs linéaires, à coefficients polynomiaux (en x),
- et récurrences linéaires, à coefficients polynomiaux (en n).

De nombreux algorithmes (paquet maple *gfun*) :
[Salvy Zimmermann 1994], [Mezzarobba 2010]

- développements de Chebyshev,
- transformations intégrales,
- bornes d'erreurs de troncatures (Taylor), ...
- fractions continues. [Euler 1748], [Wall 1948], [Khovanskii 1963], [...]

Intégration dans la prochaine version du *Dynamical Dictionary of Mathematical Functions*

$\boxed{\text{DÉMO!}}$

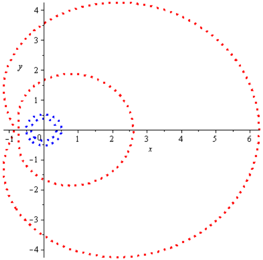
Fractions continues

$$\ln(1+x) = \sum_{1}^{4} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} + O(x^5)$$

$$= \frac{1/2\,x^2 + x}{1/6\,x^2 + x + 1} + O(x^5)$$

$$= \cfrac{x}{1 + \cfrac{x/2}{1 + \cfrac{x/6}{1 + x/3}}} + O(x^5)$$

10 chiffres, pour $x \in \mathbb{C}$
(20 puis 30 coefficients)



- Taylor ordre $2n$: convergence pour $|x| < 1$ seulement,
- Padé ordre n/n : convergence pour $1 + x \in \mathbb{R}_-$.

Fractions continues *correspondantes*

C-fraction (tronquée) :

$$\mathop{\mathcal{K}}_{i=0}^{n} \frac{a_i x^{\alpha_i}}{1} := \cfrac{a_0 x^{\alpha_0}}{1 + \cfrac{a_1 x^{\alpha_1}}{1 + \cfrac{\cdots}{1 + \cfrac{a_{n-1} x^{\alpha_{n-1}}}{1 + a_n x^{\alpha_n}}}}}, \quad a_i \in \mathbb{C}^\star,\ \alpha_i \in \mathbb{N}^*$$

Correspondance :

$$\left\{ \mathop{\mathcal{K}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_i x^{\alpha_i}}{1} \right\} \simeq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i \right\}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_n \\ \alpha_n \end{bmatrix} \right) \overset{\text{par calcul}}{\leftrightsquigarrow} (c_1, \dots, c_{\alpha_0 + \dots + \alpha_n})$$

Choix des C-fractions :
simples, très étudiées, nombreuses applications [Stieltjes 1894].

Fractions continues automatiques?

- Tabulations de formules :

  [Abramowitz Stegun 1964]
  [Cuyt, Peterson, Verdonk, Waadeland, Jones, 2008]

  coquilles, non exhaustif,
- généralisation/spécialisation, (*e.g.* hypergéométriques)
- preuves indirectes :
  limites coefficient par coefficient.

$$\exp(x) = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$$

Fractions continues automatiques?

- Tabulations de formules :

  [Abramowitz Stegun 1964]
  [Cuyt, Peterson, Verdonk, Waadeland, Jones, 2008]

  coquilles, non exhaustif,
- généralisation/spécialisation, (*e.g.* hypergéométriques)
- preuves indirectes :
  limites coefficient par coefficient.

$$\exp(x) = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \tfrac{x}{k}\right)^k$$

```
> gfun:-ContFrac:-series2cfrac(  {y'=y, y(0)=1}, y, x  );
```

Formule et preuve :

$$y(x) = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{\cdots}{1 + \cfrac{\frac{1}{2(n+1)}x}{1 + \cfrac{\frac{-1}{2n}x}{\cdots}}}}$$

Algorithmique (classique)

À partir de récurrences (linéaires à coefficients polynomiaux) définissant $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$, on peut :

- Décider si $\forall n,\ a_n = 0$;
- Calculer une récurrence pour : $(a_{n+1})_{n\geq 0}$, $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$, $(a_n b_n)_{n\geq 0}$, $\left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right)_{n\geq 0}$ ...

Exemple (Mise au carré)

```
> rec:={ u(n+2) = (n+1)*u(n+1) + 2*u(n),  u(0)=0, u(1)=1 }:
> gfun:-poltorec( u(n)^2, [rec], [u(n)], c(n) );
```

$$\left\{\left(8\,n+16\right)c\left(n\right)+\left(-2\,n^3-8\,n^2-14\,n-8\right)c\left(n+1\right)+\left(-n^3-5\,n^2-10\,n-8\right)c\left(n+2\right)+\left(n+1\right)c\left(n+3\right),\ c\left(0\right)=0, c\left(1\right)=1, c\left(2\right)=1\right\}$$

Algorithmique (classique)

À partir de récurrences (linéaires à coefficients polynomiaux) définissant $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$, on peut :

- Décider si $\forall n,\ a_n = 0$;
- Calculer une récurrence pour : $(a_{n+1})_{n\geq 0}$, $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$, $(a_n b_n)_{n\geq 0}$, $\left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right)_{n\geq 0}$ $\dots$

Exemple (Mise au carré)

```
> rec:={ u(n+2) = (n+1)*u(n+1) + 2*u(n),  u(0)=0, u(1)=1 }:
> gfun:-poltorec( u(n)^2, [rec], [u(n)], c(n) );
```

$\rightsquigarrow$ *3 générateurs sur $\mathbb{Q}(n)$:* $u(n)^2$, $u(n)u(n+1)$, $u(n+1)^2$

$$\Big\{ \left(8\,n+16\right) c\left(n\right) + \left(-2\,n^3 - 8\,n^2 - 14\,n - 8\right) c\left(n+1\right) + \left(-n^3 - 5\,n^2 - 10\,n - 8\right) c\left(n+2\right) + \left(n+1\right) c\left(n+3\right), \quad c\left(0\right) = 0, c\left(1\right) = 1, c\left(2\right) = 1 \Big\}$$

Réduction d'ordre

Problème (2^{-n} et 2^n sont dans un bateau...)

Prouver $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *si* $\{2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0, (a_0, a_1) = (1, \frac{1}{2})\}$

- *Devinette* : $a_{n+1} + \alpha a_n = 0$? $(a_0, a_1) \rightsquigarrow \alpha := -\frac{1}{2}$
- Conjecture : $\forall n, b_n = a_n$ où $\{2b_{n+1} - b_n = 0, b_0 = 1\}$
- *Preuve* : b_n satisfait la def de a_n, (rec sur n)
  - $n = 0, 1$: ok
  - $n \geq 2$: $2b_{n+2} - 5b_{n+1} + 2b_n = (2b_{n+2} - b_{n+1}) - 2(2b_{n+1} - b_n) = 0.$
    $\rightsquigarrow$ division euclidienne.

Réduction d'ordre

Problème (2^{-n} et 2^n sont dans un bateau…)

Prouver $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *si* $\{2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0, (a_0, a_1) = (1, \frac{1}{2})\}$

- *Devinette* : $a_{n+1} + \alpha a_n = 0$? $(a_0, a_1) \rightsquigarrow \alpha := -\frac{1}{2}$
- Conjecture : $\forall n, b_n = a_n$ où $\{2b_{n+1} - b_n = 0, b_0 = 1\}$
- *Preuve* : b_n satisfait la def de a_n, (rec sur n)
  - $n = 0, 1$: ok
  - $n \geq 2$: $2b_{n+2} - 5b_{n+1} + 2b_n = (2b_{n+2} - b_{n+1}) - 2(2b_{n+1} - b_n) = 0$.

    $\rightsquigarrow$ division euclidienne.

```
> gfun:-reducerecorder(
    {2*u(n+2)-5*u(n+1)+2*u(n)=0, u(0)=1, u(1)=1/2},
    u(n));
```

$$\{-u(n) + 2\,u(n+1), u(0) = 1\}$$

Deviner...

`gfun:-ContFrac:-series2cfrac(` $\{y' = y, y(0) = 1\},\ y,\ x$ `);`

$$y(x) = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{\cdots}{1 + \cfrac{\frac{1}{2(n+1)}x}{1 + \cfrac{\frac{-1}{2n}x}{\cdots}}}}$$

- Premiers termes : $(a_0,\ldots,a_{19}) = (1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}, \ldots, \frac{1}{10}, \frac{-1}{10}, \ldots, \frac{1}{38}, \frac{-1}{38})$.
- Coefficients indéterminés : $\{-n^2 a_n + n a_{n+1} + n(n+3) a_{n+2} = 0, \quad (a_0, a_1, a_2) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6})\}$.

Deviner… pour prouver

gfun:-ContFrac:-series2cfrac($\{y' = y, y(0) = 1\}$, y, x);

$$y(x) = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{\cdots}{1 + \cfrac{\frac{1}{2(n+1)}x}{1 + \cfrac{\frac{-1}{2n}x}{\cdots}}}}$$

- Premiers termes : $(a_0,\dots,a_{19}) = (1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}, \dots, \frac{1}{10}, \frac{-1}{10}, \dots, \frac{1}{38}, \frac{-1}{38})$.
- Coefficients indéterminés : $\{-n^2 a_n + n a_{n+1} + n(n+3) a_{n+2} = 0, \quad (a_0, a_1, a_2) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6})\}$.
- À prouver : $f_n := 1 + \mathcal{K}_{i=0}^{n} \frac{a_i x}{1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \exp(x)$.

…

Deviner... pour prouver.

On pose $f_n = 1 + \cfrac{a_0 x}{1 + \cfrac{\cdots}{1 + \cfrac{a_n x}{1}}}$ avec $\begin{cases} -n^2 a_n + n a_{n+1} + n(n+3) a_{n+2} = 0 \\ (a_0, a_1, a_2) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}) \end{cases}$

Propriété classique :

$f_n = 1 + P_n / Q_n$ avec $\begin{cases} P_n = P_{n-1} + a_n x \; P_{n-2} & (P_{-2}, P_{-1}) = (1, 0) \\ Q_n = Q_{n-1} + a_n x \; Q_{n-2} & (Q_{-2}, Q_{-1}) = (0, 1) \end{cases}$

Lemme (pas dur)

$f_n \to \exp(x) \iff f_{2n} \to \exp(x) \iff \mathrm{val}(H_{2n}) \to \infty$
avec $H_n := P_n' Q_n - Q_n^2 - P_n Q_n - P_n Q_n'$

Deviner. . . pour prouver.

On pose $f_n = 1 + \cfrac{a_0 x}{1 + \cfrac{\cdots}{1 + \cfrac{a_n x}{1}}}$ avec $\begin{cases} -n^2 a_n + n a_{n+1} + n(n+3) a_{n+2} = 0 \\ (a_0, a_1, a_2) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}) \end{cases}$

Propriété classique :

$f_n = 1 + P_n / Q_n$ avec $\begin{cases} P_n = P_{n-1} + a_n x\ P_{n-2} & (P_{-2}, P_{-1}) = (1, 0) \\ Q_n = Q_{n-1} + a_n x\ Q_{n-2} & (Q_{-2}, Q_{-1}) = (0, 1) \end{cases}$

Lemme (pas dur)

$f_n \to \exp(x) \iff f_{2n} \to \exp(x) \iff \mathrm{val}(H_{2n}) \to \infty$
avec $H_n := P'_n Q_n - Q_n^2 - P_n Q_n - P_n Q'_n$

- $H_{n+i} \in \mathrm{Vect}(a_n P'_n Q_n,\ \ a_n P_n Q'_n,\ \ P_{n+1} Q'_{n+1},\ \ \ldots)$ de dimension finie!
- $\rightsquigarrow$ première récurrence sur H_n, qui ne suffit pas.
- Réduction d'ordre pour conclure . . . $\boxed{\text{DÉMO!}}$

Conclusion

- Une procédure,
  - qui donne les formules,
  - les prouve, par le calcul. (rapide, direct)
- Une approche,
  - équations de Riccati,
  - 1/2 C-fractions explicites de Cuyt *et alii*.

Conclusion

- Une procédure,
  - qui donne les formules,
  - les prouve, par le calcul. (rapide, direct)
- Une approche,
  - équations de Riccati,
  - $1/2$ C-fractions explicites de Cuyt *et alii*.

À venir :

- l'autre $1/2$ (q-analogues),
- intégration au DDMF,
- peut-on toujours faire ce calcul (de preuve)?