

**Abstract**

Le présent article étudie l'évolution de la coopération dans un modèle de répartition spatiale de stratégies jouant au dilemme du prisonnier. Les stratégies sont regroupées en communautés. Ces communautés forment une topologie, on parle de réseaux de communautés. L'effectif des communautés qui ont le score moyen le plus fort (resp. le plus faible) croît (resp. décroît). Avec cette dynamique, les réseaux de communautés vont soit converger vers un état où la coopération est majoritaire, soit converger vers un état où la trahison est généralisée, soit ne pas converger. La convergence vers la coopération généralisée est favorisée par l'organisation des communautés selon une topologie de graphe aléatoire et défavorisée par l'organisation selon une topologie de type Petit-monde. Le phénomène de non convergence est tel que les évolutions des effectifs des communautés sont cycliques. Dans un tel cas, des stratégies coopératives et agressives se maintiennent dans des proportions comparables.

**Introduction**

Le dilemme du prisonnier est un cadre de modélisation pour l'évolution de la coopération. Un des mécanismes proposés par Axelrod pour le maintien de comportements coopératifs est la répartition des stratégies jouant le dilemme du prisonnier sur des topologies [1]. Cette idée a été reprise et développée par Nowak et May [2][3]. Ils ont montré comment des comportements coopératifs non réactifs pouvaient coexister avec des comportements agressifs. Dans leur modèle les stratégies sont réparties sur une grille et interagissent avec les stratégies voisines. La dynamique du modèle est fondée sur l'imitation du voisin le plus performant. L'organisation en clusters permet à des stratégies coopératives d'être isolées des stratégies agressives. L'organisation en clusters permet donc à des stratégies coopératives d'être performantes et imitées. Ce mécanisme fonde le maintien et la diffusion des stratégies coopératives dans le modèle de Nowak et May.

On propose ici un modèle de répartition spatiale des stratégies différent du modèle de Nowak et May. Nous considérons des communautés de stratégies en réseau. Dans ce cadre, chaque communauté interagit avec les communautés qui lui sont liées et dégage un score. L'évolution redistribue les effectifs vers les communautés les plus performantes, c'est à dire celles qui dégagent les scores les plus importants par rapport à leur nombre de contacts. Dans le cadre de ce modèle, la coexistence des comportements coopératifs et des

comportements agressifs prend de nouvelles formes. On présente ce modèle et les dynamiques générales qu'il induit dans le cas de topologies de grilles dans les parties I et II respectivement.

Différents travaux se situent dans la continuité du modèle de Nowak et May. Ces travaux utilisent la même dynamique évolutive que celle introduite chez Nowak et May mais placent les agents sur des topologies différentes. Duran et Mulet [4] ont étudié le fait de placer les agents sur différents types de graphes aléatoires. D'autres travaux ont étudié la répartition des agents sur des topologies de type Petits-monde [5]. Une problématique de ces travaux est l'impact de topologies aléatoires ou de topologies Petit-mondes sur le maintien et l'émergence de la coopération. On explore cette problématique dans le cadre des réseaux de communautés dans la partie III.

Des cas particuliers de co-existence des stratégies coopératives et agressives apparaissent dans les réseaux de communautés quelle que soit la topologie considérée. Dans ces cas, le système n'atteint pas d'équilibre stationnaire. L'évolution donne lieu à des variations cycliques des effectifs des communautés. Ces cas sont étudiés dans la partie IV.

**I- Le modèle des communautés**

*Stratégies et communautés*

Les agents que l'on considère sont des stratégies qui jouent au dilemme du prisonnier. Dans le dilemme du prisonnier non itéré, deux stratégies sont possibles : coopérer ou trahir. Les deux stratégies sont notées respectivement C et D. On donne la matrice des gains utilisée dans la suite :

	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>C</i>	(3,3)	(5,0)
<i>D</i>	(0,5)	(1,1)

5 est le gain lié à la trahison.

Une communauté est définie comme un ensemble de stratégies. Dans ce qui suit, on considère uniquement des communautés composées d'agents C et des communautés composées d'agents D. Les communautés sont liées entre elles et forment un graphe. On ne considère ici que des graphes non orientés.

On note N le nombre des communautés. Soit j un indice dans [1,N] alors  $V(j)$  dénote l'ensemble des communautés liées à la communauté j. Pour chaque communauté, on a un ensemble de stratégies de même type :  $type_j \in \{C,D\}$  est le type des stratégies de la communauté j. L'effectif d'une communauté j au temps t est noté  $e_j^t$ .

*Dynamique du modèle*

On propose un modèle d'évolution des communautés. L'évolution des effectifs d'une communauté repose sur le score des stratégies de cette communauté.

Une stratégie d'un nœud  $j$  joue contre toutes les stratégies de la communauté à laquelle elle appartient et obtient :

$$scoreE'_j = (e'_{(j)} - 1) * score(type_j, type_j) \quad (1)$$

où  $score(type_j, type_k)$  dénote le score d'une stratégie de  $type_j$  contre une stratégie de  $type_k$ .

Chaque stratégie joue également contre toutes les stratégies des communautés auxquelles sa communauté est liée, elle obtient contre ces stratégies :

$$scoreE'_j = \sum_{(k \in V(j))} (e'_{(k)} * score(type_j, type_k)) \quad (2)$$

Le nombre de contacts d'une stratégie est le nombre de stratégies avec lesquelles elle interagit, soit les stratégies de sa communauté autres qu'elle-même et les stratégies des communautés liées à la sienne. Le score moyen est le rapport du score gagné par une stratégie à son nombre de contacts :

$$scoreN'_j = \frac{scoreE'_j + scoreE'_j}{nbContacts_j} \quad (3)$$

A chaque communauté, on associe un score moyen. Le rapport du score généré sur une communauté  $j$  au score généré par l'ensemble des communautés définit l'évolution de la communauté  $j$  :

$$e'_j = \frac{scoreN'_j * e'_j * N}{\sum_{(i=1)}^n (scoreN'_i * e'_i * N)} \quad (4)$$

Les valeurs des  $e'_i$  vont être des réels la plupart du temps. On applique la règle de l'arrondi à l'entier le plus proche pour obtenir une valeur entière des effectifs. L'impact du choix de ce mécanisme d'arrondi sera discuté dans la suite.

La formule (4) implique qu'une communauté va croître (respectivement décroître) si son score moyen est supérieur (respectivement inférieur) au score moyen calculé sur l'ensemble des stratégies du graphe. Le mécanisme d'évolution présenté ici maintient constant l'effectif total : l'évolution consiste en une réallocation des stratégies vers les communautés qui ont le score moyen le plus fort. Une caractérisation plus précise du mode d'évolution se trouve en annexe 2.

Dans les réseaux de communautés, l'état de chaque communauté a un impact sur l'ensemble des autres communautés. Le modèle peut s'interpréter comme le partage d'une ressource globale, les individus les plus efficaces captent une plus grande part de cette ressource et font croître leur communauté.

Dans la suite, on utilise une démarche d'initialisation aléatoire des réseaux de communautés : pour chaque nœud, on note par  $p$  la probabilité de l'initialiser avec une communauté de stratégies C,  $(1-p)$  étant la probabilité de l'initialiser avec une communauté de stratégies D.

Les paramètres que l'on fait varier sont  $p$  et la topologie des réseaux de communautés. Dans la suite, on étudie l'impact de ces deux paramètres sur l'émergence de la coopération.

On commence par illustrer le fonctionnement du modèle par une série de résultats sur des topologies simples.

### Le cas de deux communautés

On considère ici l'exemple de deux communautés reliées par un arc. La première communauté est composée de stratégies C en effectif  $e_0$ , la deuxième est composée de stratégies D en effectif  $e_1$ .

On note  $q_0$  le score moyen d'une stratégie C,  $q_1$  le score moyen d'une stratégie D. On note  $N$  le nombre total des stratégies, soit, pour toute valeur de  $t$  :

$$N = e'_1 + e'_0$$

(aux problèmes d'arrondi près)

L'évolution est donnée par :

$$e'_1 = \frac{q_1 * e_1^{(t-1)}}{(q_1 * e_1^{(t-1)} + q_0 * e_0^{(t-1)})} * N$$

d'où

$$\frac{e'_1}{e_1^{(t-1)}} = \frac{(q_1 * N)}{(q_1 * e_1^{(t-1)} + q_0 * e_0^{(t-1)})}$$

soit

$$\frac{e'_1}{e_1^{(t-1)}} = \frac{(q_1 * e_1^{(t-1)} + q_1 * e_0^{(t-1)})}{(q_1 * e_1^{(t-1)} + q_0 * e_0^{(t-1)})}$$

Du fait de la matrice des gains utilisée, on a  $q_1 > q_0$  pour toute valeur des effectifs  $e_1$  et  $e_0$  donc :

$$\frac{e'_1}{e_1^{(t-1)}} > 1 \quad (5)$$

et ce pour toute valeur des effectifs  $e_1^t$  et  $e_0^t$ .

Si on raisonne avec des valeurs d'effectifs réelles, l'inéquation (5) implique qu'il y a une croissance des effectifs de  $e_1$  pour toute valeur des effectifs  $e_1$  et  $e_0$ . L'effectif de la communauté C va tendre asymptotiquement vers 0 tandis que l'effectif de la communauté D va tendre asymptotiquement vers  $N$ . Avec d'autres types de stratégies, la relation  $q_1 > q_0$  pourrait ne plus être vraie pour toutes les valeurs des effectifs. Cela induirait d'autres dynamiques.

La convergence n'est plus forcément la même si on prend les  $e_i$  à valeurs entières et non plus à valeurs réelles en appliquant un mécanisme d'arrondi à l'entier le plus proche. En effet, on peut envisager avoir un effectif  $e_1^t$  qui respecte la condition (5) mais qui est tel que :

$$\frac{(P(e'_1))}{e_1^{(t-1)}} = 1$$

en notant par  $P(e)$  l'arrondi à l'entier le plus proche de  $e$ . Pour une telle valeur de  $e_1^t$ , l'effectif  $e_1$  ne croît pas alors même que  $e_0 > 0$ . On peut donc avoir des cas de survie de stratégies liées à l'effet de l'arrondi utilisé. Cette situation ne se produit pas dans le présent exemple et l'évolution converge vers l'élimination des stratégies C. Cependant, ce mécanisme de survie de stratégies lié au choix d'un mécanisme d'arrondi se retrouvera dans la suite. La figure I-1 donne le graphique de l'évolution pour le cas de deux communautés liées.

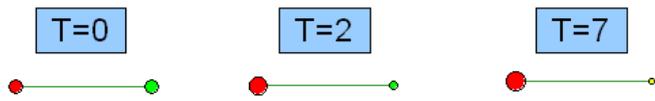
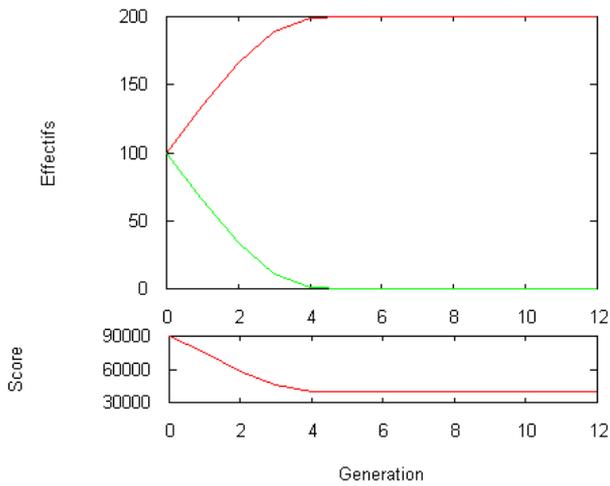


Figure I-1 : graphique de l'évolution pour 2 nœuds. Le premier graphique donne les évolutions des effectifs par type de stratégies : vert pour les stratégies C, rouge pour les stratégies D. Le deuxième graphique donne l'évolution du score total dans le graphe. Celui-ci se définit comme la somme des scores sur l'ensemble des stratégies pour une génération donnée.

Le résultat de l'évolution sur l'exemple correspond à un principe général. Dans le cas d'un graphe complet, si on a au moins une communauté D sur l'un des nœuds, l'évolution converge vers l'élimination des stratégies C. Un résultat similaire existe chez Nowak et May : dans le cas d'un graphe complet avec, associé à chaque nœud, un agent C ou un agent D, le comportement qui génère le score le plus important est le comportement agressif. Ce comportement va donc être imité par toutes les stratégies. Dans le cas de notre modèle, le fait d'avoir un graphe complet implique que le score moyen de toute stratégie D est supérieur au score moyen de chaque stratégie C et ce à tout moment de l'évolution. Le graphe complet conduit donc à l'élimination des stratégies C.

La convergence d'un graphe complet vers la trahison généralisée est conséquence directe du fait que la trahison est une stratégie strictement dominante dans le dilemme du prisonnier. La limitation des contacts entre stratégies permet de construire des configurations dans lesquelles la coopération peut se maintenir.

*Le cas de trois communautés en ligne*

On donne ici quelques évolutions sur d'autres topologies de base. On considère un premier cas qui converge vers une majorité de coopérateurs : le cas d'une topologie en bus avec trois communautés. La communauté de degré 2 est de type C, l'une des deux autres communautés est de type C et la troisième est de type D. La figure I-2 donne l'évolution de ce système.

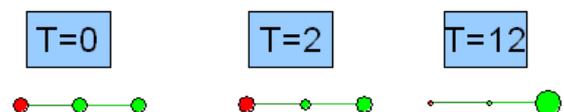
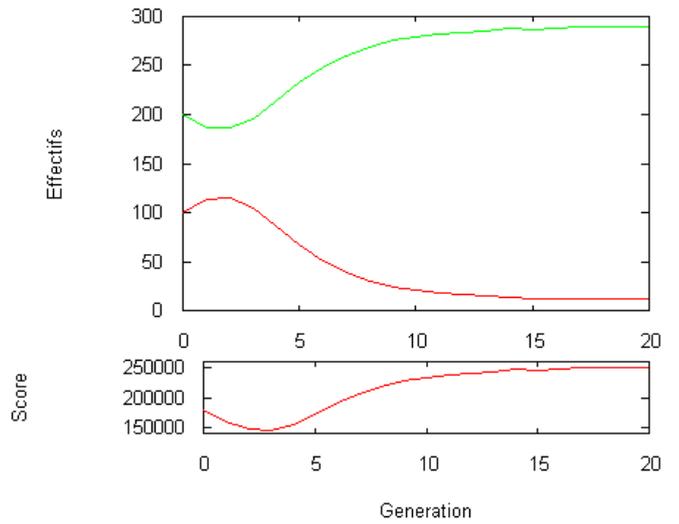


Figure I-2 : le cas d'une topologie en bus à trois nœuds. En T=12, le système est en équilibre stationnaire.

On constate sur la figure I-2 que la communauté C de degré 1 attire une large majorité des effectifs du réseau. Survivent quelques stratégies C sur la communauté centrale et quelques stratégies D sur la communauté de stratégies agressives. La survie des stratégies que l'on observe ici en dehors de la communauté C de degré 1 est liée au choix du système d'arrondi. Si on avait pris des effectifs à valeurs réelles, on aurait convergé vers une situation où l'ensemble de la population se retrouverait concentrée sur une communauté, les deux autres communautés (la communauté D et la communauté centrale) se retrouvant vidées de leurs populations.

*Topologie "en étoile"*

Les figures I-3 et I-4 correspondent à des cas de topologies en étoile. Le premier cas converge vers une situation de trahison généralisée à partir d'une étoile avec une communauté D au centre et des communautés C sur les branches. Le deuxième cas converge vers un état stationnaire avec une majorité de stratégies C à partir d'une étoile avec une communauté C au centre et une communauté C sur une des branches de l'étoile.

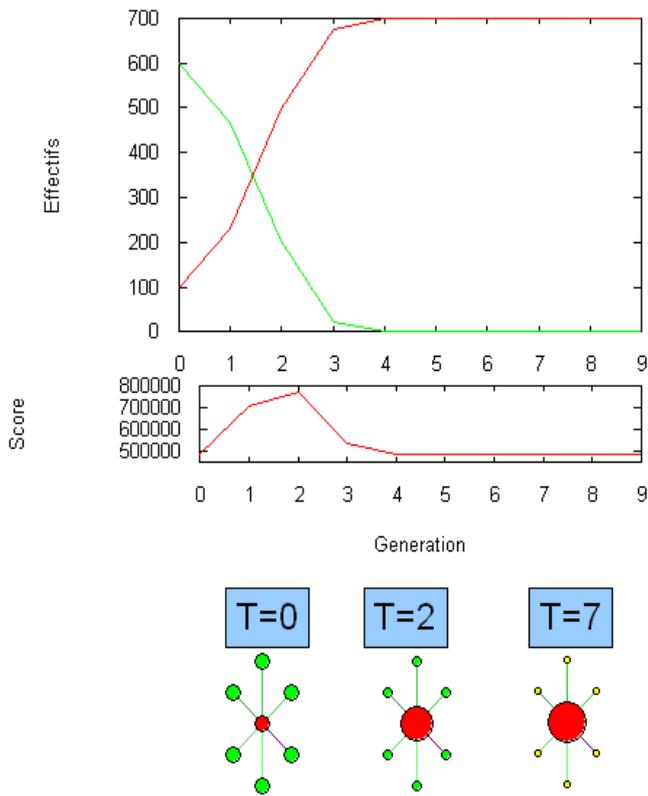


Figure I-3 : Le cas d'une topologie en étoile qui converge vers la trahison généralisée

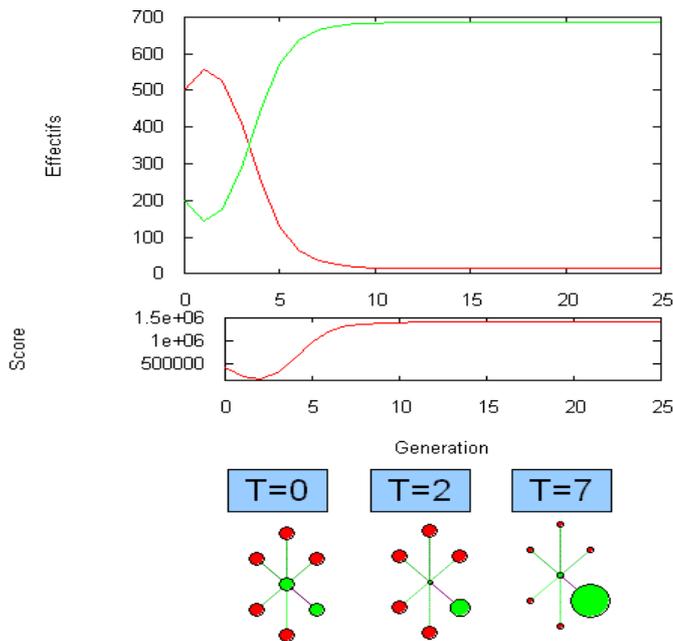


Figure I-4 : Le cas d'une topologie en étoile qui converge vers la coopération généralisée

Un phénomène particulier se produit dans le cas de la figure I-3. Alors même que la part des agents D progresse dans la population totale, on a une augmentation du score total entre T=0 et T=2. Dans tous les cas de dilemme du prisonnier, si on substitue des D à des C dans une population non répartie spatialement de stratégies, alors le score global diminue (une démonstration se trouve en annexe 5). Dans le modèle des réseaux de communautés, la substitution des D à des C peut conduire à

une hausse du score global comme le montre l'exemple.

Le mode d'évolution des réseaux de communautés induit, d'une part, une modification dans les proportions relatives des stratégies, et d'autre part, une modification de la répartition spatiale de la masse des stratégies. En I-3, la substitution d'une stratégie D à une stratégie C correspond au passage d'une stratégie d'un nœud périphérique vers le nœud central. Sur le nœud central, une stratégie dispose d'un environnement plus favorable puisqu'elle est en contact avec autant de stratégies D et plus de stratégies C que si elle était sur un autre nœud. L'évolution induit donc une dégradation de l'environnement (disparition de stratégies C), mais aussi une augmentation du nombre des stratégies qui profitent de cet environnement (croissance des stratégies D du nœud central). La dégradation de l'environnement se traduit par le fait que le score moyen sur l'ensemble des stratégies diminue continûment à partir de la première génération. L'exemple est donc tel qu'il y a un décalage entre le maximum du score moyen et le maximum du score total.

L'état pour lequel le score global est maximum n'est pas stable. L'évolution finit par faire diminuer le score total avec la poursuite de la substitution des stratégies D aux stratégies C.

Les exemples développés dans cette partie ont mis en évidence la possibilité de différents types de convergence dans le cas de topologies simples. Dans la partie suivante, on va étudier la convergence dans le cas de grilles de cardinalité 100.

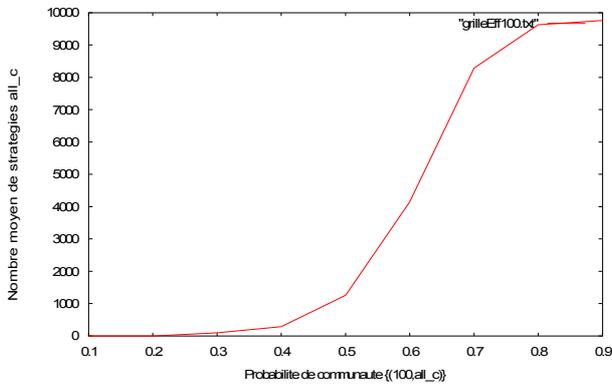
## II- Evolutions sur une Grille

On considère le cas où les communautés sont organisées selon une topologie de grille. Nous allons pouvoir établir avec cette topologie un ensemble de résultats de base.

### Evolution sur une Grille

La topologie que l'on utilise est une grille torique où chaque communauté est de degré 8. On considère des grilles 10\*10. Les communautés ont un effectif initial de 100. Les grilles sont donc de 10000 individus. On initialise une communauté avec des C avec une probabilité  $p$ . Le graphique II-1 est obtenu de la façon suivante :

- Pour chaque niveau de  $p$ , probabilité d'initialiser un nœud avec une communauté de stratégies C :
- on génère 1000 grilles. Pour une grille, chaque communauté est initialisée aléatoirement
- on lance l'évolution sur chacune des grilles. On poursuit l'évolution jusqu'à atteindre un équilibre stationnaire ou jusqu'à atteindre 1000 générations.
- on compte le nombre d'individus C à la fin de l'évolution.
- on moyenne sur l'ensemble des 1000 grilles pour obtenir le nombre moyen d'individus C pour le niveau  $p$ .



Graphique II-1 : Evolution du nombre moyen de coopérateurs dans le graphe pour une topologie de grille 10\*10

Le niveau de C en état final est croissant avec la part initiale des C dans le graphe. On constate qu'en moyenne, même pour des niveaux élevés de p, on ne converge pas vers 10000 stratégies C dans le graphe. Ce phénomène est dû au mécanisme d'arrondi choisi et sera expliqué par la suite.

A partir de l'initialisation aléatoire d'une grille avec des communautés C et D, trois états finaux sont possibles.

Dans le premier état final, les stratégies C ont toutes été éliminées. Ne subsistent que des communautés de D réparties dans le graphe. Les communautés de stratégies C ont des effectifs qui diminuent jusqu'à leur disparition. La situation où il ne reste plus que des communautés agressives est bien une situation d'état stationnaire puisque chaque stratégie produit un score moyen de 1.

Le deuxième état final possible est tel que les deux types de stratégies D et C coexistent dans une situation d'état stationnaire. Dans ce type d'état final, les stratégies C sont majoritaires et certaines communautés de stratégies C concentrent une part importante de la population du graphe. Ces communautés sont entourées d'autres communautés de type C qui ont été vidées au cours de l'évolution ou qui ont un effectif non nul. Des communautés C forment donc un cluster autour d'une communauté C. Les communautés C à la frontière du cluster ont des contacts avec des communautés D. Un exemple qui converge vers ce type d'état final est développé dans le paragraphe suivant.

Les cas qui ne convergent vers aucun des deux types d'états finaux décrits plus haut n'évoluent pas vers un état stationnaire. Dans ces cas, la plupart des communautés du graphe se sont vidées au cours de l'évolution. Les communautés non vides à la fin de l'évolution forment un sous-graphe connexe dans l'ensemble des cas qui ont été recensés. Les effectifs des communautés non vides varient indéfiniment de façon cyclique. Ces cas sont étudiés dans la partie IV.

Pour chaque niveau de p, on a une certaine probabilité associée à chacun de ces trois états finaux. Le graphique II-2 donne pour chaque niveau de p la probabilité de convergence vers les différents types d'états finaux.

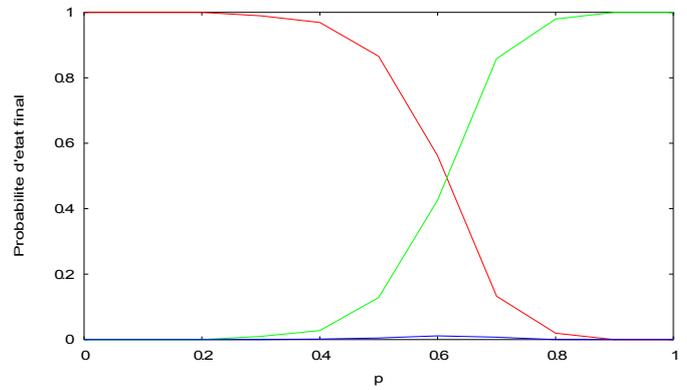


Figure II-2 : La probabilité des différents cas d'évolution finale en fonction de p . En rouge : la probabilité de converger vers la trahison généralisée. En vert, la probabilité de converger vers des situations où la coopération est majoritaire. En bleu : la probabilité d'avoir une situation cyclique)

On constate que les cas cycliques sont rares et apparaissent pour des valeurs de p comprises entre 0.4 et 0.7. On constate que ce qui fonde l'augmentation du nombre moyen de coopérateurs avec p sur la figure II-1 est l'augmentation avec p de la probabilité de converger vers un état où les agents coopérateurs sont majoritaires.

Le paragraphe suivant développe un exemple de convergence vers une situation où les coopérateurs sont majoritaires.

#### Un exemple d'émergence de la coopération

On présente ici le cas d'une configuration qui converge vers une large majorité de coopérateurs. Ce cas a été généré aléatoirement avec  $p=0.6$ . La figure II-3 correspond à une copie d'écran de la situation finale.

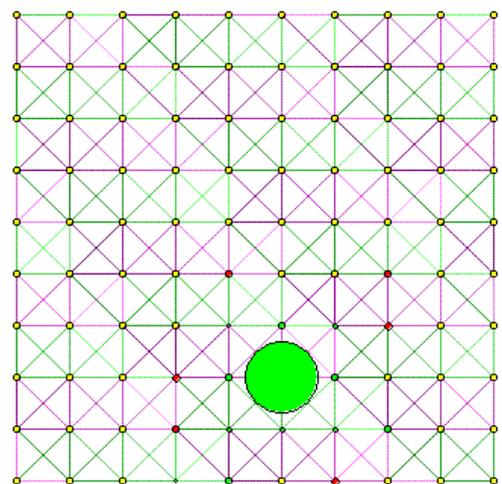


Figure II-3 : L'état stationnaire de la grille. Les nœuds jaunes sont les nœuds vides. La surface des disques représentée est proportionnelle à l'effectif des communautés

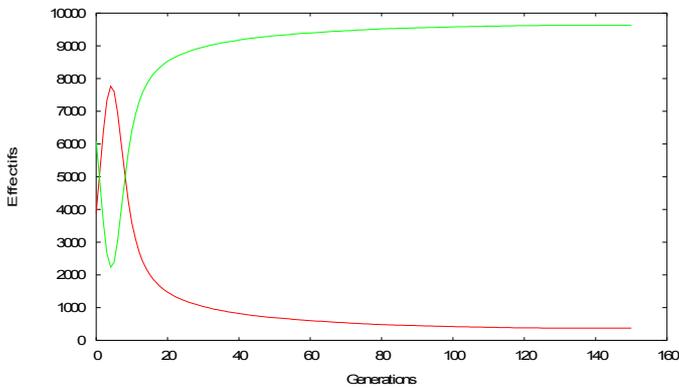


Figure II-4 : Evolution des effectifs de stratégies C et D au cours du temps.

Le graphique II-4 donne l'évolution des effectifs par type de stratégies dans le graphe considéré. Deux phases se distinguent. Dans un premier temps, il y a augmentation de la taille des communautés de stratégies D dans le graphe. Ce sont les effectifs de communautés de stratégies D liées à des communautés de stratégies C qui augmentent. En effet, ces communautés exploitent les communautés C auxquelles elles sont liées, ce qui leur donne un score moyen fort et permet leur croissance, mais induit également la décroissance des effectifs des communautés C liées. Les communautés de stratégies D vont croître jusqu'à disparition des stratégies C qui leur sont liées ou jusqu'à ce que ces communautés voisines soient trop peu peuplées. On observe un maximum du nombre des D dans le graphe avant que les effectifs des communautés D décroissent. Le phénomène qu'on observe ensuite est la croissance d'une communauté de stratégies C isolée (qui n'a de contact qu'avec des stratégies C). Les effectifs de cette communauté étaient en augmentation dès la première génération. Elle apparaît clairement sur le graphique II-3. On constate qu'elle a absorbé une part importante de la population du réseau de communautés. Des communautés C non vides entourent la communauté isolée. Ces communautés C sont liées à des communautés D. Les communautés C au voisinage de la communauté isolée bénéficient de la taille de cette communauté qui leur permet d'avoir un score moyen proche de 3. Pour les communautés de stratégies D qui survivent, leur score moyen est proche de 3 ou égal à 3 du fait de leurs contacts avec les stratégies C. Dans l'exemple, les scores moyens des stratégies D qui survivent sont à valeur dans l'intervalle [2,7,3].

La survie des stratégies C hors de la communauté isolée et des stratégies D qui leur sont liées est due au mécanisme d'arrondi. Les stratégies C ont un score moyen inférieur à 3, hors les stratégies de la communauté isolée. Dans le cas de valeurs réelles des effectifs, ces stratégies disparaîtraient, de même que les communautés D qui leur sont liées. En reprenant l'initialisation de l'exemple étudié on a testé l'impact d'un mécanisme d'arrondi à l'entier inférieur. Pour cela, à partir des valeurs d'effectifs réelles obtenues avec l'équation (4), on déduit une valeur entière en prenant la partie entière de la valeur réelle. Ce mécanisme d'arrondi conduit à la concentration de toute la population sur l'unique communauté isolée.

On donne d'autres exemples de résultats finaux à partir

d'initialisations qui convergent vers une majorité de coopérateurs en annexe 3.

#### Conditions de convergence

Dans l'exemple précédent, on voit qu'une communauté de stratégies C isolée joue un rôle fondamental dans la convergence de la grille. On généralise ici la dynamique de l'évolution constatée sur l'exemple précédent.

#### Définition

On appelle communauté isolée une communauté de stratégies C qui n'est liée à aucune communauté de stratégies D.

Lors de l'initialisation des communautés au début de l'évolution, on peut distinguer trois types de communautés : des communautés isolées, des communautés C en contact avec des communautés D et des communautés D. Le score moyen des communautés isolées est constant au cours de l'évolution : il est de 3. Pour les communautés de stratégies C non isolées, leur score moyen va être inférieur à 3 puisque  $\text{score}(C,T) = 0$ . Le score moyen de ces communautés est décroissant avec leur nombre de voisins D. Les situations des communautés D sont assez diverses. Elles peuvent être entourées de communautés D et produire des scores moyens de 1 ou elles peuvent avoir des voisinages composés de communautés C et D. Dans ce dernier cas, les communautés D peuvent produire des scores moyens supérieurs à 3 si elles sont entourées de suffisamment de voisins C. Certaines communautés D vont donc produire des scores moyens supérieurs à ceux des communautés isolées. Au cours de l'évolution, cependant, le score de ces communautés D va tendre à décroître par le biais de deux phénomènes :

- leurs voisins C produisent des scores moyens faibles et la population de ces voisins décroît, induisant une baisse du score moyen des communautés D liées
- l'augmentation des effectifs des communautés D implique une augmentation de leur nombre de contacts. Chacun des nouveaux contacts ne produit qu'un score de 1. Ces nouveaux contacts font baisser le score moyen des communautés D.

Les communautés isolées ont un score moyen stable de 3 tandis que les communautés initialement susceptibles de produire un score moyen supérieur bénéficient de configurations instables qui disparaissent au cours de l'évolution. Les populations des communautés D vont donc tendre à disparaître par suite de modification de leur environnement. Cette disparition se fait au profit des communautés C isolées.

Ce phénomène explique la convergence vers un état où quelques communautés isolées concentrent la majeure partie de la population du graphe. Dans une grille, la notion de communauté isolée renvoie à une communauté de stratégies C entourée de communautés

identiques. On retrouve ici la notion de clustering comme fondement du maintien voir du développement des comportements coopératifs.

On propose une approche plus formelle du phénomène présenté. On calcule ci-dessous le score moyen pris sur l'ensemble des stratégies du graphe dans un réseau de communautés au temps  $t=0$ . On est donc à la génération 0 et toutes les communautés ont un effectif identique de 100. On rappelle que  $p$  désigne la probabilité d'initialiser un nœud avec une communauté de stratégies C. L'initialisation de chaque nœud est indépendante de l'initialisation des autres nœuds, si on note par  $X$  la variable aléatoire qui désigne le nombre de voisins C d'une communauté, on peut établir :

$$p(X=k) = C_8^k p^k (1-p)^{(8-k)}$$

On note par  $n$  l'effectif d'une communauté au départ de l'évolution. Le score moyen généré par une communauté C ayant  $k$  voisins qui sont des communautés C est :

$$SN_C(k) = \frac{n*3*(nk+n-1)}{(9n-1)}$$

Le score moyen généré par une communauté D ayant  $k$  voisins qui sont des communautés C est :

$$SN_D(k) = \frac{n*(5(nk)+n-1+(8-k)*n)}{(9n-1)}$$

On peut calculer le score moyen sur l'ensemble des communautés C :

$$S_1(p) = \sum_{(k=0)}^8 p(X=k) * SN_C(k)$$

Et le score moyen sur l'ensemble des communautés D :

$$S_2(p) = \sum_{(k=0)}^8 p(X=k) * SN_D(k)$$

A partir de ces deux formules, on peut avoir pour un niveau donné de  $p$  le score moyen généré par une communauté. Ce score moyen est :

$$SN(p) = p * S_1(p) + (1-p) * S_2(p)$$

On peut déduire de  $SN(p)$  le score moyen généré par une stratégie.

On donne le graphique du score moyen généré par une stratégie en fonction de  $p$  et de différents niveaux de  $T$  sur la figure II-5.

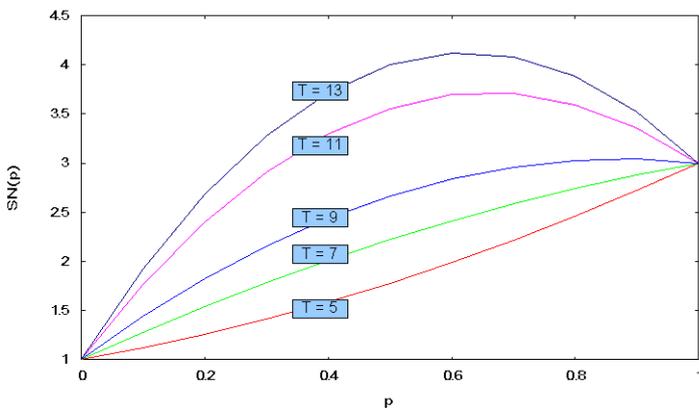


Figure II-5 : Donnée du score moyen sur l'ensemble des communautés du graphe en fonction de  $p$  pour différentes valeurs du paramètres  $T$ , prix de la trahison.

On constate que pour  $T=5$ , les valeurs du score moyen sont toujours inférieures à 3, sauf pour un graphe initialisé avec  $p=1$ . Ceci explique le fait que pour  $T=5$ , il n'y a pas décroissance des effectifs des nœuds d'une communauté C isolée à la première génération. Ce résultat ne garantit pas cependant qu'il n'y ait pas décroissance des stratégies C pour une génération suivante.

Il est possible qu'existent des configurations telles qu'on ait un score moyen supérieur à 3 si on lève l'hypothèse d'uniformité des effectifs par nœuds.

On propose ci dessous une preuve heuristique du fait que le score moyen dans le graphe est inférieur à 3 même dans le cas où on lève l'hypothèse d'uniformité des effectifs.

La preuve repose sur l'approximation du score moyen dans le graphe. On note par  $NMC_1$  l'effectif moyen sur une communauté isolée,  $NMC_2$  l'effectif moyen sur une communauté C non isolée et par  $NMD$  l'effectif moyen sur une communauté D.  $NMC$  est l'effectif moyen d'une communauté C quelconque.

Le score moyen pour une stratégie d'une communauté D à  $k$  voisins C est :

$$SN_D(k) = \frac{(5k * NMC_2 + (8-k) * NMD + NMD - 1)}{(NMD - 1 + k * NMC_2 + (8-k) * NMD)}$$

le score moyen généré en moyenne par une stratégie d'une communauté C non isolée à  $k$  voisins C est :

$$SN_C(k) = \frac{(3 * (NMC * k + NMC_2 - 1))}{(NMC_2 - 1 + k * NMC + (8-k) * NMD)}$$

Enfin, le score moyen généré en moyenne par une stratégie d'une communauté isolée est 3.

De la même façon que l'on a obtenu  $S_1(p)$  et  $S_2(p)$  précédemment, on obtient le score moyen pour une stratégie sur une communauté isolée, pour une stratégie sur une communauté C non isolée et pour une stratégie sur une communauté D.

Reste à calculer le score moyen dans le graphe. On remarque que la probabilité qu'une stratégie soit sur une communauté isolée est :

$$p_1 = \frac{NMC_1 * p^9}{(NMC_1 * p^9 + p * NMC_2 * (1-p^8) + (1-p) * NMD)}$$

La probabilité qu'une stratégie soit sur une communauté C qui n'est pas isolée est :

$$p_2 = \frac{p * NMC_2 * (1-p^8)}{(NMC_1 * p^9 + p * NMC_2 * (1-p^8) + (1-p) * NMD)}$$

Enfin, la probabilité qu'une stratégie soit sur une communauté D est :

$$p_3 = \frac{(1-p) * NMD}{(NMC_1 * p^9 + p * NMC_2 * (1-p^8) + (1-p) * NMD)}$$

Avec le score moyen d'une stratégie sur une communauté donnée et la probabilité d'avoir ce type de communauté, on calcule un score moyen par stratégie pour chaque valeur de  $NMC_1$ ,  $NMC_2$  et  $NMD$ . On a calculé le score moyen pour différentes valeurs des nombres moyens de stratégies. En faisant ce calcul, on arrive au résultat que ce

score moyen est toujours inférieur à 3. Ceci signifie qu'on ne peut pas avoir de baisse du nombre de stratégies sur les communautés isolées. Certaines communautés D vont pouvoir bénéficier temporairement d'un score moyen supérieur à 3, mais les communautés isolées ne seront pas éliminées et les scores moyens supérieurs à 3 vont progressivement disparaître dans le graphe.

On dispose désormais d'un critère pour savoir comment une initialisation donnée converge dans le cas d'une grille sous réserve que le résultat heuristique soit vrai. Si on a une ou plusieurs communautés isolées au début de l'évolution, on sait que l'évolution converge vers la concentration de toutes les stratégies du graphe sur ces communautés si on prend des effectifs à valeur réelles. La condition d'existence d'une communauté isolée est donc, dans le cas d'effectifs réels, une condition suffisante de convergence vers la coopération généralisée. Dans le cas du mécanisme d'arrondi à la partie entière, la condition suffisante n'est plus une condition de convergence vers la coopération généralisée, mais vers un état où les stratégies C seront largement majoritaires et concentrées sur les communautés isolées.

La partie suivante traite de l'émergence de coopération sur des réseaux de communautés organisés selon d'autres topologies.

### III- Evolution comparée sur d'autres topologies

Cette partie explore les réseaux des communautés organisés selon d'autres topologies. Nous introduisons les topologies de graphes aléatoires de type Erdős et Rényi[6] et les topologies Petit-mondes introduites par Watt et Strogatz[7], en les générant selon la procédure décrite par Barabási et Albert [8]. Cette procédure consiste à générer un graphe aléatoire de degré moyen  $d$  avec un petit nombre de nœuds. On rajoute ensuite nœud par nœud au graphe. Pour chaque nœud qu'on rajoute on le connecte à  $d$  voisins. La probabilité de choisir chaque nœud pré-existant est proportionnel au degré de ce nœud. On génère ainsi un graphe avec un degré moyen de  $d$ . Ce type de graphe se caractérise par une forte hétérogénéité dans la distribution du degré de ses nœuds. Une référence générale sur la théorie des graphes et notamment les caractéristiques des différentes topologies évoquées ici est [9].

Les différentes topologies que l'on étudie ont toutes un degré moyen de 8 et une cardinalité de 100 nœuds.

#### *Evolution de la coopération par topologies*

La figure III-2 donne le nombre moyen de stratégies C en fonction de  $p$ . Les trois courbes correspondent aux trois topologies étudiées. Le graphe aléatoire est de type Erdős et Rényi.

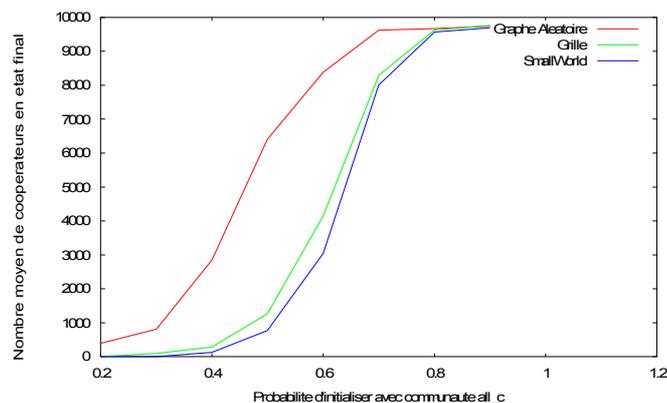


Figure III-1 Nombre moyen de stratégies C en fonction de différentes topologies. La courbe rouge correspond à la topologie de graphe aléatoire, la courbe verte aux grilles et la courbe bleue à la topologie de Barabási et Albert

On constate que le graphe aléatoire favorise la coopération par rapport aux deux autres topologies. Le résultat sur le graphe aléatoire rejoint des résultats d'autres travaux qui ont introduit le jeu d'agents C et D sur des topologies de graphes aléatoires pour simuler le désordre des configurations réelles. Ces études concluent à l'augmentation de la coopération avec une topologie de graphe aléatoire.

Les caractéristiques des topologies présentées permettent d'expliquer les résultats de la figure III-1. On rappelle qu'une communauté isolée se définit comme une communauté C entourée de communautés C. L'apparition de telles communautés est fondamentale pour qu'il y ait convergence vers une majorité de coopérateurs comme on l'a vu dans la partie précédente. Dans le cas d'une grille, la notion de communauté isolée correspond au cas d'une communauté C entourée de 8 communautés C. Dans le cas d'un graphe aléatoire, la notion s'élargit au cas de communautés C non connectées ou de communautés C faiblement connectées dont tous les voisins sont des communautés C. En effet, la génération de graphes aléatoires entraîne qu'apparaissent des communautés de degré inférieur au degré moyen. La probabilité qu'une communauté soit isolée augmente avec la baisse du degré de cette communauté, de sorte que la probabilité qu'émerge une communauté isolée est plus forte dans le cas d'un graphe aléatoire par rapport au cas d'une grille de même degré moyen.

Le fait d'utiliser un réseau de communauté avec une topologie de type Barabási et Albert limite le nombre moyen de coopérateurs. Dans un graphe de type Barabási et Albert, des nœuds de fort degré vont apparaître. Le fait qu'un seul de ces nœuds supporte une communauté D suffit à empêcher l'émergence d'une communauté isolée pour une large part des nœuds du graphe.

On étudie de façon plus continue l'impact du passage d'une topologie régulière à une topologie de graphe aléatoire. On utilise la procédure de génération de graphes décrite par Watts et Strogatz. On part d'une organisation circulaire des nœuds avec chaque nœud qui est

relié à d voisins. On élimine chaque arc avec une probabilité q, c'est à dire qu'on élimine  $q*d*N/2$  arcs en moyenne. On crée ensuite  $q*d*N/2$  arcs en tirant avec une probabilité uniforme dans l'ensemble des arcs possibles n'existant pas dans le graphe. Pour  $q=0$ , on a un graphe régulier, pour  $q=1$ , on a un graphe aléatoire au sens de Erdős et Rényi (le mécanisme de génération est illustré en annexe 6). On génère des graphes avec  $d=8$  et une cardinalité de 100.

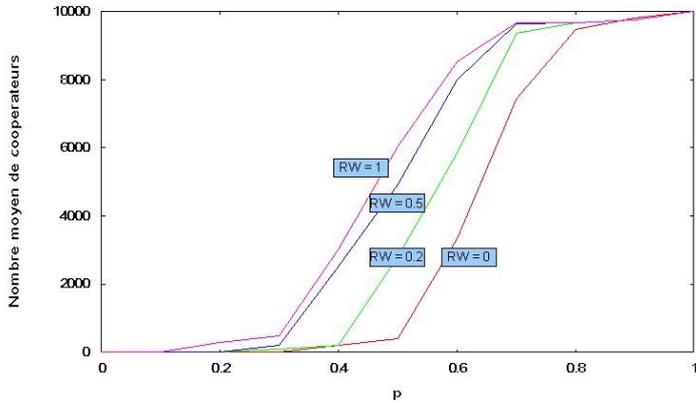


Figure III-2 : Nombre moyen de coopérateurs en fonction de la probabilité RW d'élimination des arcs dans un graphe "Watts et Strogatz"

L'évolution du nombre moyen de coopérateurs dans le cas du graphe régulier (RW=0) est proche du comportement obtenu pour des graphes de type Barabási et Albert ou pour des grilles. En faisant augmenter RW, on constate que pour tout niveau de p, on a croissance du nombre moyen de C avec RW. L'élimination d'arcs va conduire à créer des nœuds de degré inférieur au degré moyen, donc une configuration plus favorable à l'émergence de communauté isolée.

#### Condition d'existence d'une communauté isolée

On dispose pour le cas des grilles d'une condition suffisante de convergence vers les états où la coopération est majoritaire. La convergence vers de tels états fonde l'émergence de la coopération dans les réseaux de communautés organisés selon une topologie de grille. Dans ce paragraphe, on montre que l'existence d'une communauté isolée explique également l'émergence de la coopération dans les autres topologies étudiées.

On va calculer pour un graphe aléatoire la probabilité d'initialiser le graphe de telle façon qu'il comporte au moins une communauté isolée. On va calculer cette probabilité pour le cas d'un graphe aléatoire de degré moyen 8, ce qui correspond au cas étudié plus haut.

On donne la probabilité  $q(p)$  qu'un nœud soit isolé.  $p(\text{degré } k)$  dénote la probabilité qu'un nœud pris au hasard soit de degré k :

$$q = p * \sum_{(k=0)}^N (p(\text{degré } k) * p(\text{nœud protégé / degré } 8))$$

La probabilité d'avoir un nœud de degré k dans le cas d'un graphe aléatoire de degré moyen  $\lambda$  suit une loi de poisson :

$$p(\text{degré } k) = \frac{[e^{(-\lambda)} * \lambda^{(-k)}]}{(k !)}$$

de fait :

$$q = p * \sum_{(k=0)}^{100} \left( \frac{[e^{(-\lambda)} * \lambda^{(-k)}]}{(k !)} \right) * p^k$$

soit pour un graphe aléatoire de degré moyen 8 :

$$q = p * \sum_{(k=0)}^{100} \left( \frac{[e^{(-8)} * 8^{(-k)}]}{(k !)} \right) * p^k$$

On calcule q pour différentes valeurs de p. Ainsi, pour différentes valeurs de p, on a la probabilité qu'un nœud soit isolé.

Soit D la variable aléatoire qui dénote le nombre de communautés isolées dans le graphe :

$$p(D=0) = (1 - q(p))^N$$

La probabilité d'avoir au moins une communauté isolée est

$$1 - p(D=0)$$

On calcule le nombre moyen de stratégies C induit par cette probabilité (n est la taille des communautés lors de l'initialisation) :

$$(1 - p(D=0)) * n * N + (p(D=0)) * 0$$

$n*N$  est pris comme le nombre de stratégies C dans le cas d'un graphe à N nœuds et n stratégies par nœuds qui a convergé vers un état stationnaire où la coopération est majoritaire. Ceci représente une approximation, puisque le choix du mécanisme d'arrondi conduit à ce qu'il y ait moins de  $n*N$  stratégies dans les cas de convergence.

A partir de la formule, on peut simuler numériquement le nombre moyen de stratégies C dans le système en fonction de p. Le graphique III-3 donne deux courbes. La première est celle que l'on a établi précédemment : le nombre moyen de stratégies C dans les graphes aléatoires en fonction de p obtenu sur un ensemble de générations aléatoires, la seconde (rouge) correspond aux valeurs de  $(1 - p(D=0)) * n * N$  pour différentes valeurs de p.

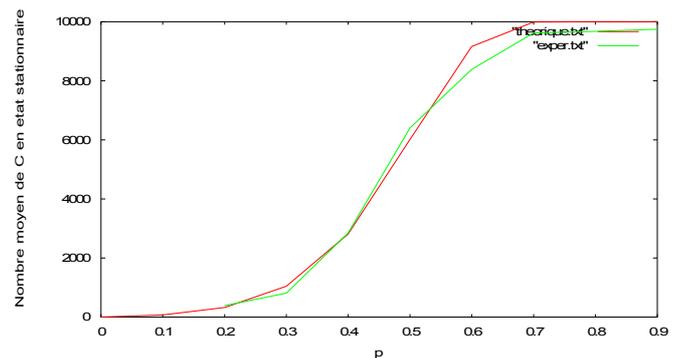


Figure III-3 : Données empiriques du nombre moyen de coopérateurs en fonction de p dans le cas d'un graphe aléatoire

On constate que l'on a un bon ajustement de la courbe découverte précédemment sauf pour de fortes valeurs de p.

Ce résultat signifie que l'apparition de communautés C isolées lors de l'initialisation suffit à expliquer le nombre moyen de coopérateurs dans les réseaux de communautés organisés selon une topologie de graphe aléatoire. Les cas d'évolution cyclique dans les graphes aléatoires sont particulièrement rares. Cette rareté des cas cycliques explique que

l'on parvienne à approximer le nombre moyen de coopérateurs en se fondant seulement sur la probabilité d'avoir une initialisation avec une communauté isolée.

On cherche à obtenir un résultat similaire pour le cas des graphes Petit-mondes. On génère 10000 initialisations pour chaque niveau de  $p$ . On compte le nombre des initialisations telles qu'on a au moins une communauté isolée. On peut en déduire la fréquence des initialisations avec une communauté isolée. Cette fréquence joue un rôle similaire à la probabilité  $(1-p(D=0))$  dans la démarche précédente. On peut donc calculer le nombre moyen de stratégies C induit par le fait d'avoir une communauté isolée dans l'initialisation.

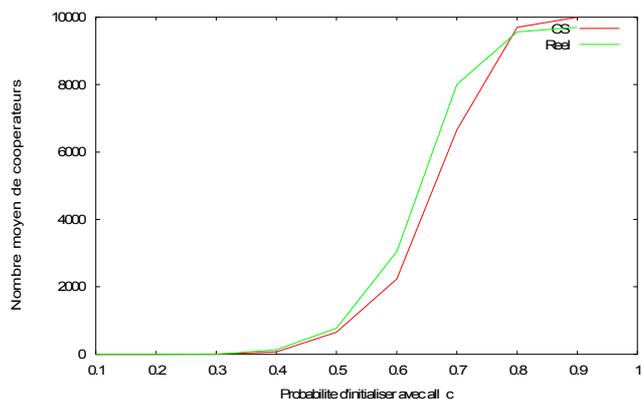


Figure III-4 : Comparaison entre niveau de coopération liée à l'existence de communautés isolées et niveau de coopération constaté empiriquement dans le cas des graphes Petit-mondes

On constate que l'on obtient un bon ajustement de la courbe ici sur la figure III-4.

Ces résultats confirment à nouveau que l'émergence de coopération vient des communautés isolées. Il ne semble pas qu'il y ait d'autres phénomènes conduisant à l'apparition de la coopération hors les phénomènes de survie des stratégies C dans les cas d'évolution cycliques. Les différentes topologies se distinguent par la probabilité qu'elles induisent de générer des communautés isolées.

#### La sensibilité au degré moyen

On utilise les mêmes types de topologie que dans le paragraphe précédent. La seule différence est que l'on prend une valeur du degré moyen de 4, toujours avec une cardinalité de 100 nœuds.

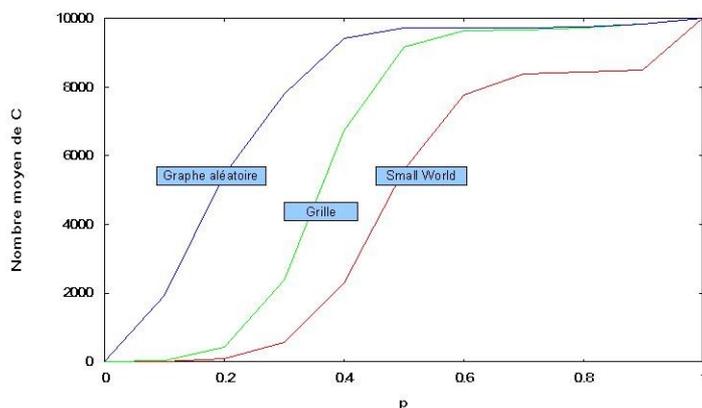


Figure III-5 : Evolution du nombre moyen de coopérateurs pour des topologies à degré moyen 4

Pour une topologie donnée, l'émergence de la coopération est favorisée par la baisse du degré moyen. En effet, la condition d'émergence d'une communauté isolée est favorisée par la baisse du degré moyen. La topologie de graphe aléatoire est toujours celle qui favorise le plus l'émergence de la coopération.

Le fait de prendre un degré moyen inférieur amplifie la différence entre les graphes de type small-world et les grilles. Ceci provient du fait que dans le cas d'une grille de degré moyen 4, la probabilité d'avoir une communauté isolée est de  $p^5$  contre  $p^9$  pour le cas d'une grille à 8 voisins. De façon générale, ce n'est pas le fait que la topologie soit régulière qui est à mettre en avant pour dire que la coopération est défavorisée dans le cas des grilles à 8 voisins, c'est le fait qu'on a une topologie régulière avec un degré moyen élevé. Au contraire du cas des grilles, le principe qui empêche l'émergence d'une communauté isolée dans le cas des graphes de type Barabási et Albert reste valable même pour un degré moyen inférieur. Le principe de génération du graphe continue de faire émerger des communautés fortement connectées. Le fait qu'une communauté de fort degré soit une communauté D suffit à empêcher l'émergence de communautés isolées pour une large part des nœuds du graphe.

Pour les trois formes de convergence qui ont été décrites en II, on a pu établir un critère qui permet d'expliquer la convergence vers une majorité d'agents C. Le critère de l'existence d'une communauté isolée explique l'émergence de cas où les coopérateurs sont majoritaires et le nombre moyen de coopérateurs pour les différentes topologies. Le fait de n'avoir pas de communauté isolée n'est cependant pas un critère de disparition des stratégies C. Des cas spécifiques de coexistence des stratégies C et D émergent dans le cadre des réseaux de communautés.

#### IV- Cas d'évolution cyclique

On a évoqué plus haut l'existence de cas d'évolution qui ne convergent pas. Dans ces cas, l'évolution des effectifs des communautés est cyclique. Lorsque l'on a un cas d'évolution cyclique qui apparaît, la population du graphe se concentre sur un petit nombre de nœuds. Les autres régions du graphe ont été vidées de leur population au cours de

l'évolution. Ces cas apparaissent dans les trois topologies qui ont été explorées dans la partie précédente. Ils émergent pour des initialisations sans communautés isolées, auquel cas on aurait convergence vers un état stationnaire comme évoqué dans les parties II et III.

#### Présentation du phénomène - un exemple particulier

On commence par développer un cas particulier d'évolution cyclique pour une topologie de grille.

Ce cas a émergé pour une grille de 100 nœuds et une probabilité  $p=0.6$ . L'évolution vide la plupart des communautés sauf 10 nœuds. Ces nœuds forment un sous-graphe connexe. La période du système est de 132 générations. On donne des copies d'écran partielles de l'évolution dans ce sous-graphe connexe sur la figure IV-1.

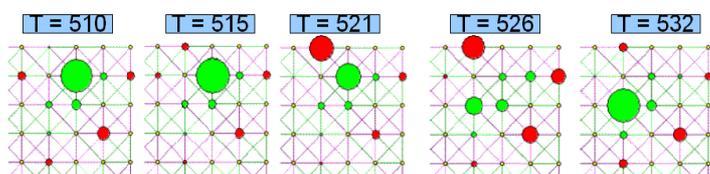


Figure IV-1 : Evolution d'une partie du graphe. L'évolution entière sur une période est donnée en annexe 4. Les autres communautés du graphe sont d'effectifs nuls.

On constate que les communautés C qui survivent sont fortement clusterisées : chaque communauté C est liée à au moins deux communautés de même type. On constate également que chaque communauté C est liée à une communauté D.

Le phénomène de cyclicité se retrouve au niveau des effectifs de chaque communauté et donc au niveau des effectifs totaux par type de stratégie. On donne le graphique de l'évolution des populations de stratégies et du score total dans le réseau sur la figure IV-2.

Les communautés à effectifs non nuls forment un sous-graphe connexe. Les autres communautés se sont vidées de leurs effectifs au cours de l'évolution. Le score moyen dans le graphe en régime d'oscillations stabilisées évolue entre [1.96:2.92]. On constate que ce score est suffisant pour éliminer les communautés de stratégies D qui pourraient rester dans le graphe hors des 10 nœuds puisque ces communautés D seraient de score moyen 1.

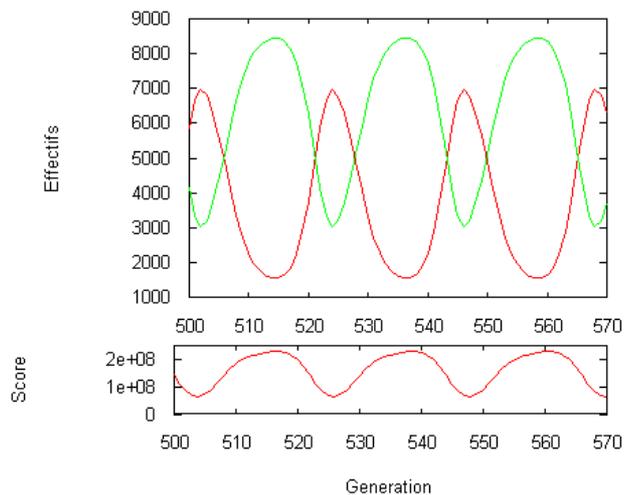


Figure IV-2 : Evolution des effectifs par type de stratégies et évolution du score total

#### Caractéristiques générales du phénomène

Des cas cycliques sont possibles dans l'ensemble des topologies étudiées dans la partie III. Cependant, on observe des différences quantitatives et qualitatives dans les cas cycliques en fonction des topologies.

Dans toutes les topologies étudiées, ils émergent pour des valeurs de  $p$  qui sont comprises entre 0.4 et 0.7. Les probabilités d'émergence de cas cycliques à partir d'initialisations aléatoires des graphes sont données dans le tableau IV-1 en fonction de la probabilité  $p$  d'initialiser une communauté avec une communauté C.

	<i>Grille</i>	<i>Random Graph</i>	<i>Small-World Barabási Albert</i>
$p=0.4$	0.002	0	0
$p=0.5$	0.005	0.00025	0.00014
$p=0.6$	0.012	0.002	0
$p=0.7$	0.008	0	0

Tableau IV-1 : Probabilité d'apparition de cas cyclique

L'organisation des communautés selon une topologie de grille génère beaucoup plus de cas d'évolution cyclique. Ceci est à rapprocher du fait noté sur l'exemple : les communautés C qui participent au phénomène de cyclicité sont fortement clusterisées. L'un des critères de distinction entre les différentes topologies est le clustering. Les graphes aléatoires sont des topologies très faiblement clusterisées ( $c=0.08$  pour un graphe de 100 nœud et de degré moyen 8), les graphes Petit-mondes ont un clustering plus fort du fait de l'existence des nœuds de fort degré : pour deux nœuds liés, ils peuvent être connectés à des mêmes nœuds de fort degré ( $c=0.16$ ). Les grilles à 8 voisins que l'on a considéré sont fortement clusterisées par rapport aux deux autres topologies (0.21). L'explication fondée sur le clustering est cependant incomplète. On constate que les cas cycliques sont plus probables dans le cas des

topologies de graphes aléatoires par rapport aux topologies de type Barabási et Albert alors même que le clustering est plus fort dans les graphes de type Barabási et Albert.

On cherche à donner des éléments généraux sur les cas de cyclicité. Les nœuds qui sont en situation de cyclicité forment toujours un sous-graphe connexe dans les cas de cyclicité qui ont été découverts. On cherche à caractériser ce sous-graphe. Le tableau IV-2 donne des éléments de caractérisation des situations cycliques.

	<i>Grille</i>	<i>Graphe Aléatoire</i>	<i>Petit-monde</i>
Nombre moyen de communautés C	5.874	9.833	45.5
Nombre moyen de communautés D	5.922	12.833	8
Nombre moyen de voisins C pour une communauté C	3.134	2.58	11.54
Nombre moyen de voisins D pour une communauté C	1.17	1.39	1.0879
Nombre moyen de voisins D pour une communauté D	0.62	0.36	0.375
Nombre moyen de voisins C pour une communauté D	1.16	1.065	6.1875

Tableau IV-2 : données sur les cas de non convergence pour les différentes topologies. Chaque valeur est obtenue comme une moyenne sur l'ensemble des cas cycliques obtenus pour la topologie correspondante

On retrouve la notion de clusters de communautés C ici : chaque communauté C est liée à 3 communautés C en moyenne. Chaque communauté C est reliée à une communauté D seulement. Les communautés D ne sont pas liées entre elles ou faiblement. En moyenne, le nombre de nœuds impliqués dans l'évolution cyclique est faible dans le cas des grilles. Il est plus fort dans le cas des Petit-mondes et des graphes aléatoires. La disproportion entre le nombre de communautés C et le nombre de communautés D dans les cas cycliques issus de topologies petit monde confirme l'hypothèse que l'on a faite en III. Un petit nombre de communautés D fortement connectées empêche l'émergence d'une communauté C isolée. Dans le cas des graphes aléatoires ou des grilles, chaque communauté D a un nombre de voisins C proche de 1 en moyenne alors que ce nombre moyen est de 6 pour les topologies de type Petit-monde.

#### *Principe dynamique et cyclicité*

Dans tous les cas de non convergence, on retrouve une même configuration à 4 nœuds, celle qui est donnée par la figure IV-3.

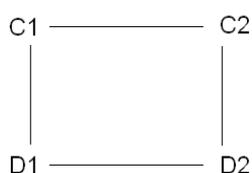


Figure IV-3 : La configuration générant des cycles. C1 et C2 sont des communautés de stratégies C, D1 et D2 sont des communautés de stratégies D

Dans cette configuration, une augmentation des effectifs de C1 (resp. C2) induit une augmentation des effectifs de D1 (resp D2). L'augmentation des effectifs de D1 induit une diminution des effectifs de D2 par augmentation du nombre de stratégies D avec lesquelles la communauté D2 est en contact. A partir d'une augmentation de la communauté C1, on a donc augmentation des effectifs de la communauté D1 et une diminution des effectifs de la communauté D2. Cette évolution se poursuit jusqu'à ce qu'on soit dans une situation où le score moyen sur C1 est trop affaibli par l'augmentation du nombre de contacts de la communauté. Dans cette configuration, C2 est telle qu'elle a un nombre de contacts important vers des C (avec le lien vers C1) et la communauté D à laquelle elle est liée a un effectif faible. C2 va donc croître. La croissance de C2 correspondra à une phase de décroissance des effectifs de C1 et de D1 et une phase de croissance des effectifs de D2, soit une situation symétrique à la dynamique de départ. Cette évolution sur ce type de structure se constate dans l'exemple détaillé en annexe 4.

#### *Résilience du phénomène cyclique*

Ce paragraphe étudie la résilience du phénomène cyclique constaté. La résilience va s'étudier en provoquant des variations à partir d'un état du cycle et en étudiant la convergence.

Un état du cycle correspond à la donnée de l'ensemble des effectifs des nœuds qui sont non vides à la fin de l'évolution cyclique. Pour chaque communauté, on provoque une variation de son effectif. La variation de l'effectif se fait par le tirage aléatoire d'une valeur selon une loi normale. On applique un facteur d'amplitude : G sur la valeur x tirée au hasard. L'effectif du nœud sera modifié de  $G*x$ . On n'élimine pas les effectifs des nœuds : si la nouvelle valeur de l'effectif d'un nœud est inférieure à 0, alors l'effectif sera fixé à 1. En provoquant des variations sur chaque valeur d'effectif, on obtient un nouvel état à partir duquel on peut relancer une évolution. On étudie cette évolution et on teste si elle est cyclique. Le graphique suivant donne la probabilité d'avoir de nouveau un cas cyclique en fonction de la variable G :

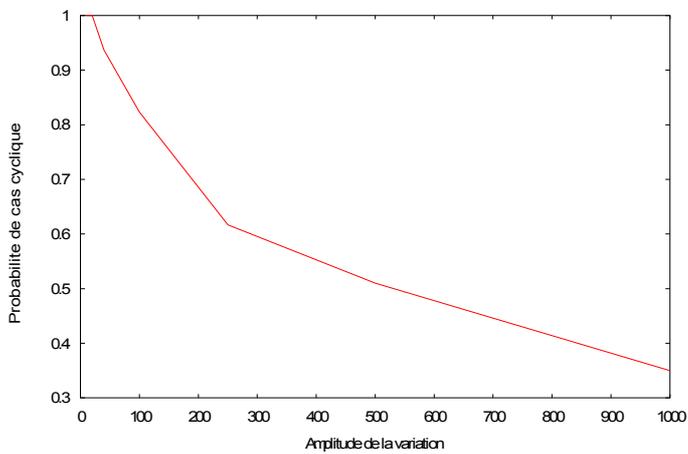


Figure IV-4 Evolution de la probabilité d'obtenir des cycles

On constate que l'on a une baisse de la probabilité avec l'amplitude des variations provoquées. Cependant, même pour des variations d'importance, d'ordre 1000, il reste une probabilité non négligeable d'avoir de nouveau un cas cyclique. L'état perturbé que l'on utilise au départ est un état qui engendre une évolution cyclique. Si on compare les nouvelles valeurs d'effectifs du cycles obtenu après perturbation, on constate qu'on ne retrouve pas le cycle initial sur l'ensemble des perturbations générées.

## Conclusion et discussion

Dans un modèle de type réseau de communautés, la répartition spatiale des stratégies permet la convergence vers des états de coexistence de stratégies agressives et de stratégies coopératives non réactives.

Différents types de convergence sont possibles. On dispose d'un critère de convergence vers un état à majorité de coopérateurs. En effet, l'existence d'une communauté isolée induit la convergence vers des états où la coopération est majoritaire, voire généralisée si on considère un autre mécanisme d'arrondi que l'arrondi à l'entier le plus proche ou si on prend des valeurs réelles pour les effectifs. C'est donc l'existence d'une communauté isolée qui fonde l'émergence de la coopération. Ce résultat est vérifié pour les topologies de grilles mais également pour les graphes aléatoires au sens de Erdős et Rényi et pour les graphes Petit-monde au sens de Barabási et Albert.

La différences entre les topologies se ramène à une différence dans la capacité à faire émerger des communautés isolées. On constate notamment que pour différents niveaux de degré moyen, les graphes Petit-mondes au sens de Barabási et Albert sont moins favorables à l'émergence de la coopération que les graphes aléatoires au sens de Erdős et Rényi. Ceci vient du fait que dans les graphes aléatoires, chaque communauté D n'a qu'une portée limitée puisque le degré de la communauté est proche du degré moyen, tandis que dans les graphes Petit-mondes, la probabilité qu'émergent des communautés D fortement

connectées est forte, ce phénomène empêchant l'émergence de la coopération pour une large part des communautés C.

Dans le cas d'initialisations sans communauté isolée, un phénomène d'évolutions cycliques peut émerger. Les différentes topologies ne sont pas équivalentes au regard de ce phénomène, les topologies régulières induisant une probabilité plus forte de faire émerger des cas cycliques. Les communautés qui participent au phénomène cyclique forment un sous-graphe connexe sur lequel on peut établir un certain nombre de propriétés génériques. Le phénomène de cyclicité repose sur l'existence d'un cluster de communautés C avec des communautés D à la frontière de ce cluster. On a mis en évidence une structure à 4 communautés qui fonde le phénomène cyclique et qui se retrouve dans chacun des cas de cyclicité rencontré. Cette structure induit sur toute la structure un phénomène cyclique qui est résilient.

Des études complémentaire sur le présent modèle pourraient avoir pour objet l'impact de topologies plus massives qui pourraient permettre de faire émerger d'autres phénomènes ou de mettre en évidence des transitions de phase marquées. On pourrait également étudier la spécification de mécanismes complémentaires au mode d'évolution proposé ici pour enrichir les dynamiques susceptibles d'émerger.

## Références

- [1] Axelrod *The Evolution of Cooperation* (1984)
- [2] Nowak et May *The Spatial Dimensions of Evolutions* International Journal of Bifurcation and Chaos 3: 35-78
- [3] Nowak et May *Spatial Game and the maintenance of cooperation* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 91, No. 11 (May 24, 1994) , pp. 4877-4881 (1994)
- [4] Duran et Mulet *Evolutionary Prisoner's Dilemma in Random Graphs* Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 208, Issue 3-4, 1 September 2005, Pages 257-265
- [5] Zhi-Xi Wu, Xin-Jian Xu et Ying Hai Wang *Does the scale free topology favor the emergence of cooperation ?* eprint arXiv : physics/058220 (2005)
- [6] Erdős et Rényi *On random graphs* Publ. Math. Debrecen 6, 290 (1959)
- [7] Watts et Strogatz. *Collective Dynamics of Small World Networks*. Letters to Nature (1998)
- [8] Barabási et Albert *Emergence of scaling in Random Networks*. Science 15 october 1999 : Vol 286. no. 5439, pp 509-512
- [9] Barabási et Albert *Statistical Mechanics of complex networks* Reviews of Modern Physics, Vol 74, (2002)
- [10] Jean-Paul Delahaye et Rémi Dorat. *Vivre serein dans un monde cruel ?* Pour la Science n°346 (08/2006).

## Annexe 1 : Clusters et stabilité de la coopération dans le modèle de Nowak et May

Cette annexe vise à illustrer la dynamique du modèle de Nowak et May. Dans ce modèle, chaque agent joue contre ses voisins. Son score est la somme des scores qu'il obtient contre chaque voisin. Cet agent va copier le comportement du voisin qui génère le meilleur score. Par exemple, un agent C dont le meilleur voisin est un agent D va changer de stratégie, un agent C dont le meilleur voisin est un agent C ne va pas changer de comportement. On considère une répartition des stratégies sur une grille torique avec un voisinage de Von Neumann (8 voisins).

On commence par étudier la survie des stratégies C organisées en clusters. On considère un dilemme du prisonnier avec les valeurs suivantes :  $T=5$ ,  $R=3$ ,  $P=1$ ,  $S=0$ . On donne des clusters de stratégies C qui sont stables avec ces valeurs, c'est à dire les clusters qui ne disparaissent pas avec l'évolution.

D	D	D	D	D
D	C	C	C	D
D	C	Cc	C	D
D	C	C	C	D
D	D	D	D	D

Ici le cluster est stable au sens du modèle de Nowak et May, pour tout point D de la frontière, il obtient soit 12, soit 20, tandis que le point central (Cc) du cluster obtient 24 et donc reste le meilleur voisin des C sur la bordure du cluster.

D	D	D	D	D
D	D1	C	C	D
D	C	Cc	C	D
D	C	C	C	D
D	D	D	D	D

Ici, on a le score de D1 qui est 20 quand le score de Cc est de 21. Le score des autres D de la frontière est au maximum de 20 points. Donc, D1 va se transformer en C1 au coup suivant, on revient alors à la configuration précédente qui est stable.

Des exemples de clusters instables :

D	D	D	D	D
D	C	C	C	D
D	D1	Cc	C	D
D	C	C	C	D
D	D	D	D	D

Ici, le score de D1 est : 28, le score de Cc étant 21, on va donc avoir invasion du cluster de C par imitation de D1.

D	D	D	D	D
D	D1	C	C	D
D	D2	Cc	C	D
D	C	C	C	D
D	D	D	D	D

Ici, le score de D1 est : 16, le score de D2 est : 26. Le score de D2 est donc supérieur au score de Cc. Il y a donc invasion du cluster à la génération suivante. D'autres configurations qui conduisent à l'invasion du cluster sont possibles, on ne les illustre pas ici.

Pour d'autres valeurs du dilemme du prisonnier, on peut avoir diffusion des stratégies à partir d'un cluster. On donne un exemple ci-dessous pour les valeurs :  $T=1.4$ ,  $R=1$ ,  $P=S=0$ .

D	D	D	D	D
D	D	D	D	D
D	D	C	C	D
D	D	C	C	D
D	D	D	D	D
D	D	D	D	D

Ici, le score d'une stratégie D à la frontière du cluster est de 1.4 ou de 2.8. Le score d'une stratégie C du cluster est de 3. Donc, les stratégies D vont imiter les C. On obtient à la génération suivante :

D	D	D	D	D
D	C	C	C	C
D	C	C	C	C
D	C	C	C	C
D	C	C	C	C
D	D	D	D	D

On a diffusion des C à partir du cluster.

L'organisation en cluster des stratégies C permet la survie et la diffusion des stratégies C dans le modèle de Nowak et May. En effet, l'organisation en cluster des stratégies C va permettre à des stratégies C d'être performantes et donc d'être le meilleur voisin des stratégies C à la frontière du cluster. Les formes de clusters stables ou de clusters qui permettent la diffusion vont varier avec les paramètres du modèle.

## Annexe 2 : Caractérisation du mode d'évolution

On a défini dans la partie II le mécanisme d'évolution dans les réseaux de communautés. On donne ici une caractérisation de ce mode

d'évolution .

On rappelle que le mécanisme d'évolution est donnée par :

$$e_j^t = \frac{\text{score}N_j^{(t-1)} * e_j^{(t-1)}}{\sum_{(i=1)}^n (\text{score}N_i^{(t-1)} * e_i^{(t-1)})} * N \quad (4)$$

On définit le score moyen sur l'ensemble des communautés du graphe comme :

$$Q^t = \frac{\sum_{(i=0)}^n (\text{score}N_i^{(t-1)} * e_i^{(t-1)})}{\sum_{(i=0)}^n e_i^{(t-1)}}$$

On a donc d'après (4):

$$\frac{e_j^t}{e_j^{(t-1)}} = \frac{q_j}{Q^t}$$

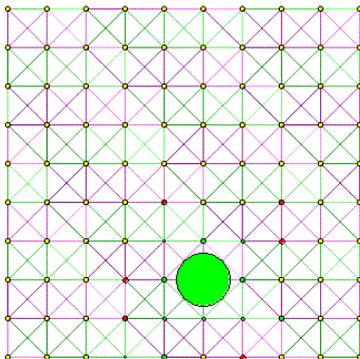
La croissance de l'effectif de la communauté j est donc équivalente au fait que le score moyen sur la communauté j est supérieur au score moyen dans l'ensemble du graphe.

**Annexe 3 : différents états finaux obtenus à partir d'une grille initialisé à 0.6**

On se place dans le cadre du modèle des réseaux de communautés. A partir d'une grille de 100 noeuds, différents types de convergences sont possibles. On propose ici des copies d'écran pour illustrer ceci. Ces exemples ont été obtenus avec une probabilité d'initialiser un noeud avec une communauté C de p=0.6. Pour cette valeur de p, la probabilité de converger vers une majorité de coopérateurs est de 0.4 environ, la probabilité de converger vers un cas cyclique est d'environ 0.012.

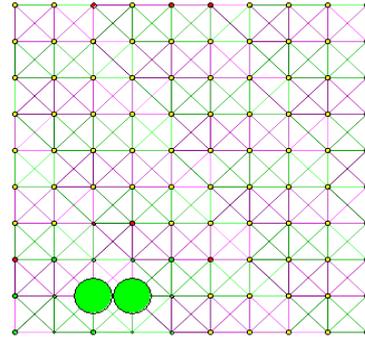
On rappelle que les nœuds jaunes correspondent aux communautés vides. La couleur rouge représente les communautés D, la verte les communautés C. L'aire des disques est proportionnelle à l'effectif des communautés représentées.

On donne un ensemble de cas qui ont convergé vers une majorité de coopérateurs. Dans le premier cas, l'initialisation n'a généré qu'une unique communauté isolée (communauté entourée seulement de communautés de stratégies C) :

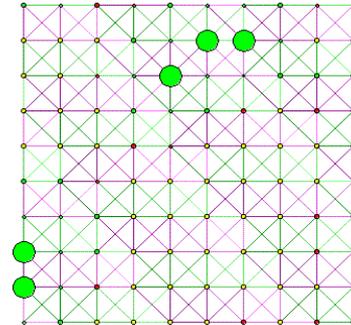


Le cas suivant converge à partir d'une initialisation avec deux

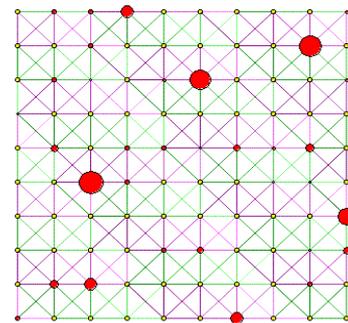
communautés isolées. La convergence se fait vers un état où les communautés non vides à la fin de l'évolution forment un sous-graphe connexe :



Un cas qui converge à partir d'une initialisation avec 5 communautés isolées. La convergence se fait vers un état où les communautés non vides à la fin de l'évolution forment un sous-graphe non connexe.



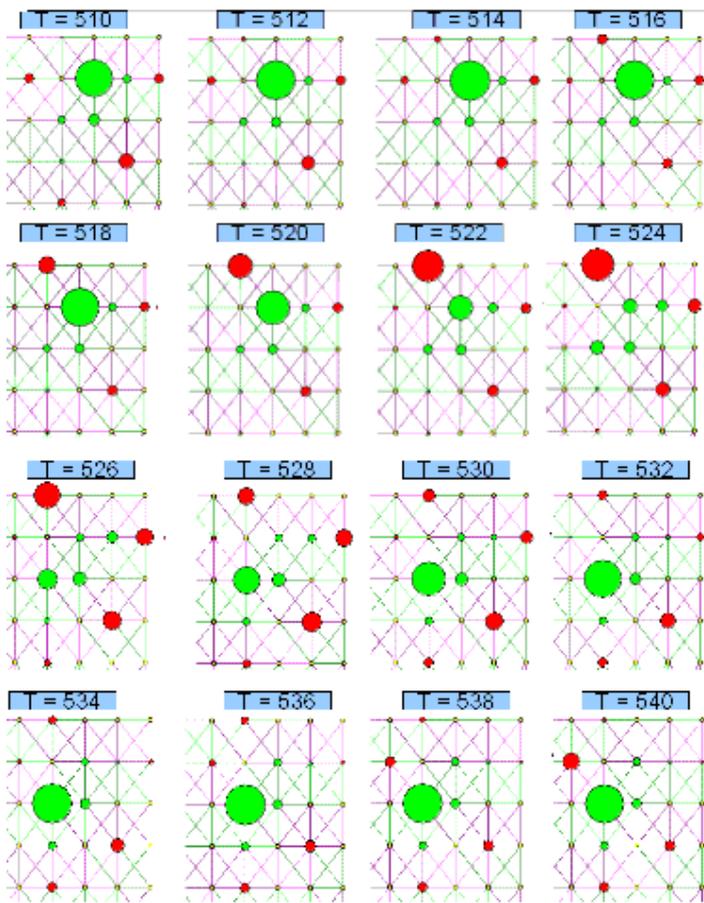
Un cas qui converge vers la trahison généralisée, l'initialisation est ici telle qu'il n'y a pas de communauté isolée :



#### Annexe 4 : Copies d'écran d'une période pour un cas d'évolution cyclique

Certaines initialisations donnent lieu à des évolutions qui ne convergent pas dans le modèle des réseaux de communautés. Les variations des effectifs sont cycliques. On présente ici un exemple d'une telle évolution. Cet exemple est obtenu à partir d'une topologie de grille initialisée avec une probabilité de communauté C de 0.6. Dans les différents cas d'évolutions cycliques que l'on a rencontré, seules une partie des communautés sont non vides à la fin de l'évolution. Ces communautés forment un sous-graphe connexe.

On donne des copies d'écran de la partie de la grille qui n'a pas été vidée. Entre deux copies d'écran, il y a deux générations. On a ici l'ensemble d'une période (132 générations) :



Dans le cas développé ici, il reste 10 communautés non vides à la fin de l'évolution. Les effectifs de chaque communauté connaissent des évolutions cycliques, ce qui induit notamment qu'il y a une évolution cyclique des effectifs globaux des stratégies C et D dans le graphe.

#### Annexe 5 : Substitution des D au C dans des communautés non réparties spatialement

Dans une population de stratégies non répartie spatialement,

une stratégie joue contre toutes les autres stratégies de la population. Son score est la somme de ce qu'elle gagne contre l'ensemble des autres stratégies. Le score total produit dans le graphe est la somme de ce que gagnent toutes les stratégies. On veut montrer le théorème suivant :

**Théorème :** dans une population de stratégies non réactives et non réparties spatialement, toute substitution de stratégies D à des stratégies C induit une baisse du score total produit.

Soit une population de N stratégies, x stratégies C et N-x stratégies D.

Avec les valeurs classiques du dilemme du prisonnier, le score d'une stratégie C est :

$$3*(x-1)$$

Le score d'une stratégie D :

$$5x+(N-x-1)$$

Le score total :

$$Score\ total = x*[3(x-1)] + (N-x)[5x+N-x-1]$$

On obtient :

$$\frac{(d\ Score\ Total)}{(dx)} = -2x - 2 + 3N$$

D'où

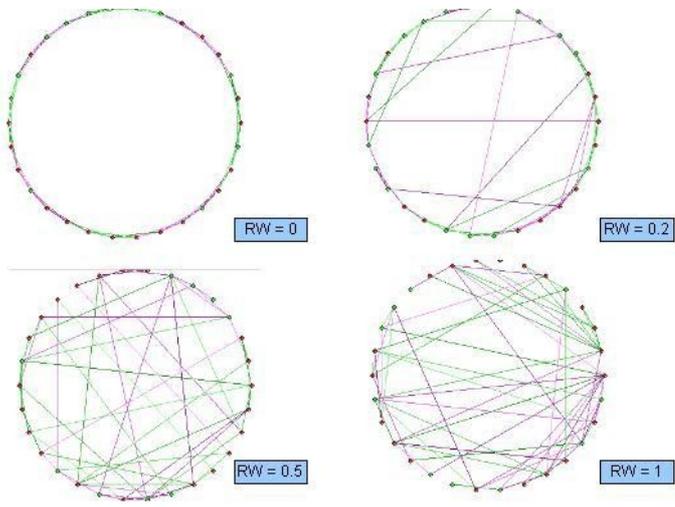
$$\frac{(d\ Score\ Total)}{(dx)} > 0 \text{ est équivalent à } \frac{3N}{2} - 1 > x$$

Cette condition est vraie pour tout N>2. Ce théorème est également vrai pour N=2. Donc le théorème est vrai pour tout N>1.

Toute substitution de stratégies D à des stratégies C dans une population de stratégies implique une baisse du score global.

#### Annexe 6 : Génération de graphes "petits-monde"

On rappelle le mécanisme de construction d'un graphe Petit-Monde selon la procédure décrite par Watts et Strigatz. On part d'un graphe régulier de N nœuds organisés en cercle, chaque nœud étant relié à k voisins. On élimine une proportion RW des arcs existants. On régénère le même nombre d'arcs que ce qui a été éliminé en choisissant aléatoirement un arc parmi l'ensemble des arcs non présents sur le graphe.



Le graphique donne des copies d'écran pour  $N=30$  et  $k=4$ , on a donc 60 arcs. La figure étiquetée  $RW=0$  est le graphe régulier de départ qui n'a subi aucun changement. Pour  $RW=1$ , on a un graphe aléatoire au sens de Erdős et Rényi.