Mémoire de DEA Session de juillet 2003

Comparaison des théories des jeux pour l'étude du comportement d'agents

Ouassila Labbani

Sous la direction de
Philippe Mathieu Bruno Beaufils

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille – UMR 8022 CNRS
Bât. M3 – 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX
Tél. +33 (0)3 20 43 47 24 – Télécopie +33 (0)3 20 43 65 66 – E-mail direction@lifl.fr

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui, par leur participation et leurs encouragements, m'ont permise de mener à bien ce travail.

En premier lieu, je remercie Philippe Mathieu *et Bruno* Beaufils *pour avoir suivi mon travail avec patience et intérêt, pour leur dynamisme et leurs conseils précieux ainsi que pour la confiance qui m'ont témoigné tout au long de ce stage.*

Mes sincères remerciements vont également aux membre de l'équipe SMAC : Jean-Christophe, Sébastien, Yann, Marie-Hélène, Damien et Jérémy, pour l'ambiance très favorable qu'ils ont su créer autour de moi.

Je tiens aussi à remercier tous les enseignants du laboratoire d'informatique fondamentale de Lille qui ont contribué à ma formation.

Un grand remerciement est également adressé à tous les membres de l'équipe RD2P pour leur sympathie.

Je ne saurais exprimer ma profonde reconnaissance et gratitude à mes parents qui m'ont tout enseigné et ont suivi et soutenu mon évolution depuis mes premiers pas. Leur amour et leurs perpétuels encouragements ont été la source et la force d'aboutissement de ce travail qui est en grande partie le leur, qu'il leur soit dédié.

Je suis également très reconnaissante envers ma soeur Ouiddad et son mari Noureddine pour leur aide et conseils.

Je ne peux oublier à cette occasion mes frères Fouad et Fayçal et ma soeur Ouafa, ainsi que tous mes amis.

Table des matières

Introduction

Notre travail a été réalisé au sein de l'équipe SMAC[1] du LIFL[2]. Cette équipe s'intéresse depuis longtemps à l'étude des mécanismes de coopération entre agents. L'objectif de ses travaux est de comprendre ces mécanismes afin de pouvoir les intégrer dans le comportement d'agents artificiels.

L'équipe SMAC s'intéresse aux interactions entre agents logiciels et au codage de comportement sous toutes leurs formes. Ces recherches se sont portées dans trois directions principales :

- les architectures multi-agents : projet MAGIQUE [3]
- la coopération : projet PRISON [4]
- la négociation : projet ANTS[5]

Notre travail s'inscrit dans le cadre de la coopération où nous étudions le comportements des agents dans des environnements particuliers et homogènes.

Les théories sont des notions complexes, stables en certaines de leurs parties, mouvantes en d'autres, ensembles d'idées qui évoluent au fil du temps, au gré des interventions originales des chercheurs qui les alimentent. La théorie des jeux n'échappe pas à la règle. Elle est en permanence transformée par des innovations conceptuelles.

La théorie des jeux se propose d'étudier toute situation dans laquelle des individus interagissent. Ces résultats, quoique très théoriques ont pourtant des implications dans des domaines aussi importants que la théorie de l'évolution, la sociologie, la politique et permettent par exemple de mieux comprendre le déroulement des guerres.

Cette théorie définit une étude des comportements rationnels des individus en situation de conflit. Elle a été appliquée pour la première fois en science économique où elle a remporté un franc succès. Par la suite, on s'est aperçu que les *jeux* sont présents dans des domaines aussi inattendus que la biologie, la sociologie, ou l'informatique.

Nous pouvons distinguer trois approches différentes en théorie des jeux. Le but principal de chacune d'entre elles consiste à étudier les situations de conflit qui peuvent exister entre des individus en interaction. Cependant, chaque théorie est basée sur un ensemble différent d'hypothèses et cherche à atteindre un but bien particulier.

La première approche est la *théorie des jeux classique* qui est apparue au début des années 40. Cette théorie prend comme hypothèse principale la rationalité forte des individus. Chaque individu cherche à maximiser ses gains personnels en prenant en considération le comportement de ses adversaires. La théorie classique cherche à trouver une solution

[1]Systèmes Multi-Agents et Coopération, www.lifl.fr/SMAC
[2]Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, www.lifl.fr
[3]http ://www.lifl.fr/SMAC/projects/magique
[4]http ://www.lifl.fr/IPD
[5]http ://www.lifl.fr/SMAC/projects/ants

optimale pour résoudre les conflits. Dans ce cadre, les théoriciens des jeux ont introduit la notion d'équilibre (Nash notamment). Cette notion peut conduire chaque individu à une situation de non regret mais elle ne peut pas lui garantir un gain optimal.

La seconde approche est la *théorie des jeux évolutionnaire*. Cette théorie est apparue suite aux expériences effectuées par des biologistes. Ces derniers ont constaté que le comportement des espèces est peu rationnel au sens décrit par la théorie classique. En théorie des jeux évolutionnaire chaque individu cherche à améliorer non pas son gain personnel mais le gain total de la population dont il fait partie.

La théorie des jeux évolutionnaire cherche à étudier la dynamique de l'évolution. Elle propose un ensemble de méthodes formelles pour pouvoir évaluer le comportement des différentes stratégies (évolutionnairement stables notamment). Cependant, la théorie évolutionnaire représente une simplification du monde réel et fournit une approche purement théorique, dans un espace continu, qui peu être rarement appliquée dans des domaines réels.

La troisième approche en théorie des jeux est la *théorie des jeux computationnelle*. Le but principal de cette théorie consiste à donner des outils efficaces pour étudier et analyser et reproduire les différents comportements. Cette théorie étudie, à l'aide de raisonnements mathématisés et des méthodes de simulation, les choix stratégiques d'individus placés dans une situation de conflit.

La théorie des jeux computationnelle fournit des méthodes d'évaluation et d'exploration permettant de mieux analyser les différentes stratégies. Cette évolution permet non seulement de comparer les critères de qualité des différentes stratégies mais aussi de mieux comprendre leur fonctionnement et, dans certains cas, de déduire une *bonne* stratégie.

Les domaines d'utilisation de ces différentes approches de la théorie des jeux sont assez éloignés. La terminologie utilisée par les uns et les autres est assez proche. Néanmoins, elle amène souvent des confusions car des termes identiques désignent des aspects radicalement différent. Il en résulte une communication assez complexe entre les chercheurs des différents domaines. L'utilisation des travaux d'une communauté par l'autre est alors assez peu fréquente.

Le but du travail proposé ici consiste à déterminer et fixer le plus précisément possible les concepts de base des différentes approches de la théorie des jeux.

Dans un premier temps, nous présentons la théorie des jeux classique et nous introduisons les notions de base de cette théorie, afin de nous appuyer sur des concepts clairement établis. Nous basons par la suite notre étude sur l'application de cette théorie en microéconomie et nous exposons les différents résultats classiques obtenus dans ce domaine.

Le second chapitre est consacré à l'étude de la théorie des jeux évolutionnaire. Nous présentons d'abord l'utilité de cette théorie et nous étudions, par la suite, les notions de base et les concepts proposés par cette théorie.

Dans le troisième chapitre nous introduisons la théorie des jeux computationnelle. Après avoir introduit les techniques d'évolution proposées dans cette approche nous présentons les méthodes de simulations qui sont utilisées pour tous les résultats apparaissant dans ce document permettant de mieux voir l'utilité de cette théorie.

Dans le quatrième chapitre nous présentons une synthèse générale sur les trois approches de la théorie des jeux. Cette synthèse nous permet de mieux comprendre la différence entre ces approches et bien expliquer les notions de base utilisées par chacune d'entre elles.

En annexes A et B nous présentons les résultats les plus marquants des expériences effectuées. Ces résultats permettent de mieux comprendre les concepts de base des différentes approches de la théorie des jeux et de fixer le plus précisément possible les notions de base de cette théorie.

Chapitre 1

Théorie des jeux classique

Ce chapitre est consacré à l'étude de la théorie des jeux classique tel qu'elle est utilisée en particulier en économie et en science sociale. Elle permet d'étudier les différentes situations de conflits qui peuvent exister entre des individus intentionnels et rationnels. Après l'introduction des concepts de base de cette théorie, nous nous intéressons à l'étude de deux méthodes d'analyse des jeux, appliquées en microéconomie. La première est utilisée dans la cas des jeux à un seul coup, tandis que la seconde permet d'étudier les jeux répétés indéfiniment et dont les *stratégies* peuvent être représentées par des *automates finis*.

1.1 Introduction

Deux individus arrêtées ensemble en possession d'armes à feu sont soupçonnées d'un délit fait en commun. Les policiers les mettent dans des cellules différentes et proposent à chacun d'entre eux le marché suivant : « *Si l'un de vous deux avoue et que l'autre n'avoue rien, le premier est libéré, et le second sera emprisonné pendant* 5 *années. Si chacun de vous deux avoue, vous irez tous les deux en prison pour une durée de* 3 *ans. Cependant, si aucun de vous n'avoue, vous serez tous les deux libérés assez vite après une année de prison* ». La question que chacun de nous peut se poser est : « Si je suis un des deux prisonniers, qu'elle sera la décision que je vais prendre ? » Cette situation est largement connue sous le nom de « *dilemme du prisonnier* » [Flo52] qui définit toute situation de conflit où deux individus *rationnels*, dans le sens où ils cherchent à maximiser leur gain personnel, doivent prendre une décision simultanément et séparément, sachant que la décision de chacun des deux individus a un impact sur l'autre individu.

Supposons maintenant qu'un prisonnier soit enfermé dans une cellule, le policier n'a aucune preuve pour le condamner mais hésite à le libérer et pense qu'il est coupable. Dans ce cas le policier propose au prisonnier le marché suivant : « *Vous avez le choix entre deux clés différentes dont une seule qui vous permet d'ouvrir la porte. Je place une des deux clés dans ma main droite et l'autre dans ma main gauche et vous avez le droit de choisir une seule clé. Si c'est la bonne vous êtes libéré, sinon vous serez emprisonné pendant une année* ». C'est une autre situation de conflit où l'individu n'arrive pas à prendre facilement une décision, dans ce cas, le hasard jouera un grand rôle. Une telle situation est connue sous le nom du « *jeu de pile ou face* ».

Des situations similaires sont souvent présentes dans notre vie réelle, sociale, économique ou tout autre domaine où les gens interagissent entre eux et se trouvent dans des situations de conflit. Le but principal pour chaque individu consiste à savoir comment réagir et quelle sera la décision à prendre pour satisfaire son intérêt personnel. Pour répondre à ces besoins, plusieurs études ont été entamées pour pouvoir analyser et, dans certain cas, résoudre ces conflits. Cette étude des conflits d'intérêts est appelée « *Théorie des jeux* ».

La théorie des jeux est un outil mathématique développé principalement par John von Neumann à partir de 1920 [Pou92]. Le premier ouvrage fondamental date de 1944 [vNM44]. Cette théorie se propose d'étudier toute situation dans laquelle des individus rationnels interagissent. Assez rapidement, elle a été saluée comme une solution éventuelle aux problèmes de formalisation que connaissent les sciences sociales. Son champ d'application est l'individu intentionnel et rationnel qui est en interaction avec au moins un autre individu. La théorie des jeux sert donc surtout à modéliser des situations où des individus sociaux prennent des décisions individuelles séparées, mais ayant un impact combiné sur les autres individus (pour plus de détails voir [Aum89]).

La théorie des jeux est généralement utilisée dans des applications militaires, elle intervient aussi dans les questions économiques (problèmes de concurrence, gestion des entreprises) et politiques (élections). Cependant, nous ne pouvons pas trouver une définition précise de cette théorie, certains auteurs prétendant qu'elle cherche à expliquer les phénomènes observés, ou à faire des prédictions, d'autres qu'elle est prescriptive (normative), d'autres encore qu'elle est l'une et l'autre. Voici quelques exemples :

Version descriptive

- Eric Rasmussen [Ras94] :

  « *C'est là exactement le paradigme de la théorie des jeux : celui qui construit le modèle attribue des fonctions de gain et des stratégies aux joueurs, puis* observe *ce qui se passe lorsqu'ils choisissent des stratégies pour obtenir le gain maximum* ».
- Ken Binmore [Bin99] :

  « *La théorie des jeux, telle qu'elle est développée actuellement, est surtout la* description *de ce qui se passe lorsque des personnes interagissent rationnellement* ».
- David Kreps [Kre92] :

  « *l'objet de la théorie des jeux est d'aider les économistes* à comprendre *et* à prédire *ce qui se produit dans différentes situations économiques* ».

Version normative

- Eric Van Damme [vD95] :

  « *Game Theory is a normative theory : it aims to prescribe what each player in a game should do in order to promote his interests optimally* ».
- Robert Sugden [Sug94] :

  « *My approach, like that of classical game theory, will be normative : I shall try to show why and how it might be rational for players to make use of the information provided by labels* ».
- Luce et Raiffa [LR85] :

> « *Il est essentiel, pour nous, que le chercheur en sciences humaines sache que la théorie des jeux n'est pas* descriptive, *mais plutôt (conditionnellement)* normative. *Elle n'établit ni comment les gens se comportent, ni comment ils devraient le faire pour atteindre certains buts. Elle prescrit, avec des hypothèses données, des types d'action qui conduisent à des issues ayant un certain nombre de propriétés qui relèvent de l'optimalité* ».

Mélange des deux

– Encyclopedia Britannica :

> « *A solution to a game* prescribes *the decision the players should make and* describes *the game's appropriate outcome. Game theory serves as a guide for players and as a tool for* predicting *the outcome of a game* ».

1.2 Qu'est-ce qu'un jeu ?

Un jeu est une situation où des individus (les *joueurs*) sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance (les *règles du jeu*), qui permet de déterminer *qui* peut faire *quoi* et *quand*. Les résultats de ces choix constituent une issue du jeu à laquelle est associé un gain pour chacun des participants. Ces résultats ne dépendent pas de la décision d'un seul joueur et ne dépendent pas non plus uniquement du hasard, bien que celui-ci puisse intervenir.

Un jeu est dit à *information complète* si chacun des joueurs connaît la structure du jeu, c'est-à-dire : l'ensemble des joueurs, les préférences des joueurs, les règles du jeu et le type d'information qu'à chaque moment du jeu chaque joueur possède sur les actions entreprises par les autres joueurs au cours des phases précédentes. Donc, chaque joueur peut se mettre à la place de tous les autres joueurs et du modélisateur. Le jeu du dilemme du prisonnier est à information complète car chacun des prisonniers connaît parfaitement la règle du jeu définie par le policier ainsi que l'utilité de l'autre joueur. Si au moins un des joueurs ne connaît pas entièrement la structure du jeu, le jeu est dit à *information incomplète.*

Un jeu est dit à *information parfaite* si chacun des joueurs, au moment de choisir son action, à une connaissance parfaite de l'ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs. Un jeu est à *information imparfaite* si un des joueurs ne connaît pas, à un moment du déroulement du jeu, ce qu'a joué un autre joueur. Ceci peut arriver dans le cas où on cache l'information aux joueurs ou parce que les joueurs jouent simultanément. Le jeu du dilemme du prisonnier est à information imparfaite car les deux joueurs jouent simultanément.

Tout au long de ce rapport, nous nous intéressons uniquement aux jeux à deux joueurs, à information complète et dont la connaissance est commune pour tous les joueurs. Dans ce cadre, nous discutons les différentes solutions dans les deux cas : information parfaite et imparfaite.

1.3 Forme extensive et forme stratégique d'un jeu

1.3.1 Jeu sous forme extensive

Lorsqu'il y a information complète, chaque joueur connaît toutes les données du problème, pour lui et pour les autres. Toutefois, pour qu'un jeu soit totalement défini, il faut que ses règles précisent l'ordre des coups. Trois types de situations peuvent alors être envisagées :

- soit les joueurs font leurs choix de façon séquentielle, dans un ordre précis fixé à l'avance ;
- soit ils prennent leur décision simultanément ;
- soit ils font face à des situations *mixte*, avec des coups successifs et des coups simultanés.

Lorsque les règles du jeu stipulent que les joueurs interviennent les uns après les autres, dans un ordre précis et que le nombre d'actions parmi lesquelles leur choix s'exerce est fini, la représentation qui semble la plus appropriée consiste à tracer un « arbre » (appelé arbre de Kuhn). Une telle représentation, dite sous *forme extensive*, peut être illustrée par l'exemple suivant présenté par Bernard Guerrien [Gue95].

Exemple

Nous considérons une entreprise, notée NV (pour *nouveau venu*) qui envisage de produire un bien dont l'offre est le fait d'une autre entreprise, M (pour *monopole*). Pour NV le choix est simple, soit il *entre* soit il *n'entre pas*, M ayant décidé s'il cède, par exemple en limitant sa production afin d'éviter un effondrement des prix dans le cas où NV entre, ou s'il ne cède pas. Nous avons donc trois issues possibles : soit NV n'entre pas et M fait le bénéfice maximum, soit NV entre et M cède de sorte qu'il y a un partage des ventes entre les deux entreprises, soit NV entre et M ne cède pas, et toute deux produisent à perte. Nous avons donc l'arbre de Kuhn de la figure 1.1, où à chaque issue est associée un

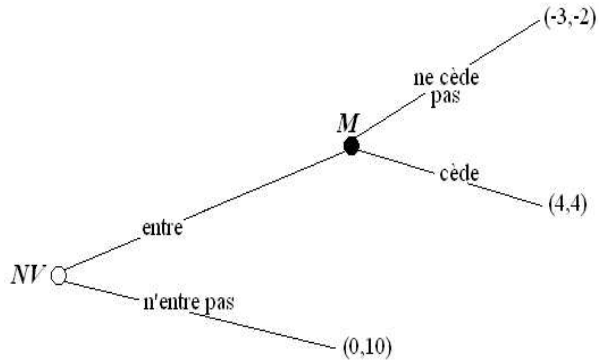


Fig. 1.1 – *Exemple d'un arbre de Kuhn.*

vecteur de gains (a, b). a donne le gain de celui qui joue en premier (ici, NV) et b le gain de celui qui joue en second (ici, M).

La construction et l'étude des jeux sous forme extensive offrent un moyen commode de représenter des interactions stratégiques séquentielles dans des jeux à information parfaite. Cette représentation a l'avantage de permettre de visualiser les diverses combinaisons possibles, en tant que chemins sur l'arbre de Kuhn [vD89, Gir00].

Dans le cas des jeux à information imparfaite, le recours à un arbre de Kuhn est toujours possible. Dans ce cas, l'existence de coups simultanés se traduit par l'apparition d'*ensembles d'informations* regroupant les noeuds de l'arbre relatifs à ces coups. Dans

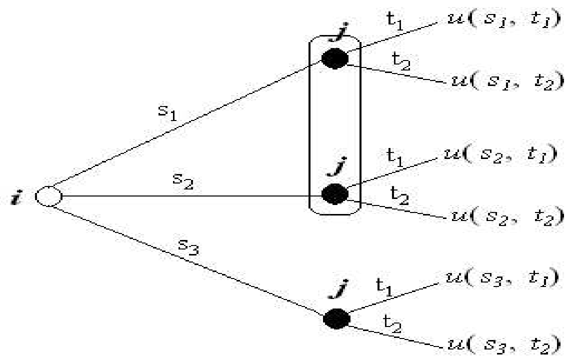


FIG. 1.2 – *Forme extensive représentant un jeu à information imparfaite.*

l'arbre représenté dans la figure 1.2, deux noeuds correspondant aux choix possibles du joueur j sont regroupés dans un ensemble d'informations, ce qui signifie que si i choisie s_1 ou s_2, alors j le sait tout en ignorant laquelle de ces deux *stratégies* a été effectivement retenue. Dans ce cas, si j atteint son ensemble d'informations,il peut uniquement déduire que i n'a pas choisi s_3.

1.3.2 Jeu sous forme stratégique

Lorsque le jeu est à coups simultanés, la représentation par la forme extensive devient particulièrement lourde et plus compliquée. Pour cela la modélisation qui apparaît comme la plus appropriée est la *forme stratégique*, ou *normale*, qui fait appel à un (ou des) tableau(x) de nombres donnant les gains des joueurs pour chacune des issues possibles, les lignes et les colonnes correspondent aux diverses stratégies. Dans ce contexte, nous supposons que la satisfaction d'un joueur peut être représentée par des nombres réels. Plus le nombre est élevé, plus la satisfaction est importante. Ces préférences sont définies par une fonction d'utilité ou de satisfaction des résultats (pour plus de détails voir [PR98, LR85]).

Par exemple dans le jeu des prisonniers, la satisfaction décline avec le nombre d'années passées en prison. Considérons par exemple, que chaque prisonnier donne une valeur de gain de 5 s'il est libéré, de 3 s'il passe une année en prison et de 1 s'il est emprisonné pour 3 ans. Puisque chaque joueur a deux stratégies différentes : *Avouer* et *Garder le silence*, la forme stratégique correspondante peut être représentée par la matrice carrée M du tableau 1.1.

Chaque élément dans la matrice M est représenté par un couple $M_{A,B} = (a, b)$ où a représente le gain pour le joueur i et b le gain pour le joueur j lorsque i choisit de jouer la stratégie A tandis que j joue la stratégie B (pour plus de détails voir [Shu91, LR85]).

			Joueur j	
			Garder le silence	Avouer
M :	Joueur i	Garder le silence	$(3,3)$	$(0,5)$
		Avouer	$(5,0)$	$(1,1)$

TAB. 1.1 – *Forme stratégique pour le dilemme du prisonnier.*

1.4 Notion de stratégie

Selon Andrew Schotter [Sch96], une stratégie est un plan d'actions complet pour chaque joueur spécifiant ce que fera ce dernier à chaque étape du jeu et face à chaque situation pouvant survenir au cours du jeu. La stratégie décrit totalement le comportement d'un joueur. Elle se décompose en plusieurs opérations qui correspondent à chacune des phases d'une étape d'un jeu. Une stratégie précise donc quels sont les calculs et décisions à effectuer pour chacune de ces trois phases, *initiation*, *choix* et *terminaison*.

Pour mieux comprendre cette notion de stratégie, considérons le jeu du dilemme du prisonnier représenté par sa forme stratégique du tableau 1.1. Dans ce cas, chaque joueur peut choisir entre deux actions différentes qui définissent ses stratégies de jeu. Cette notion est mieux exprimée dans le cas d'un jeu à plusieurs coups. Considérons par exemple, le jeu des prisonniers répété deux fois. Dans ce cas, le gain total sera la somme des gains obtenus dans chacune des étapes. Dans ce contexte, 4 stratégies différentes sont possibles :

1. garder toujours le silence,
2. avouer dans tous les cas,
3. garder le silence ensuite avouer
4. avouer ensuite garder le silence.

Ces stratégies sont dites *stratégies pures* car elles ne contiennent aucune notion d'aléatoire et n'utilisent pas des fonctions de probabilité. Il existe un autre type de stratégies, dites *stratégies mixtes*, qui consiste à donner une distribution de probabilité sur les différentes actions possible. Par exemple, dans le dilemme itéré du prisonnier, chaque joueur peut choisir de garder le silence avec une probabilité p et d'avouer avec une probabilité $1-p$ à chaque étape du jeu, avec $0 \leq p \leq 1$. Notons que les stratégies pures peuvent être considérées comme étant un cas particulier des stratégies mixtes lorsque $p = 1$.

1.5 Concepts de solutions d'un jeu et notion d'équilibre

L'analyse d'un jeu permet de prédire l'équilibre qui émergera si les joueurs sont rationnels. Un *équilibre* est un état ou une situation dans lequel aucun joueur ne souhaite modifier son comportement une fois connu le comportement des autres joueurs. De façon plus précise, un équilibre est une combinaison de stratégies telle qu'aucun des joueurs n'a d'incitation à changer sa stratégie une fois connues les stratégies des autres joueurs. Une fois que l'équilibre est atteint dans un jeu, il n'y aucune raison de le quitter.

Les jeux que nous étudions dans ce qui suit correspondent à des situations dans lesquelles chaque joueur arrête seul ses choix stratégiques sans consulter les autres joueurs.

De tels jeux sont appelés « *jeux non coopératifs* » parce qu'ils n'offrent pas la possibilité d'une coopération formelle ou liante entre les différents joueurs.

1.5.1 La solution par récurrence à rebours

Considérons le jeu du « *Monopole-Nouveau Venu* » représenté par la forme extensive de la figure 1.1. Afin de voir comment ce jeu peut être résolu, commençons par nous mettre à la place de M. Si NV décide de ne pas entrer, il suffit à M de continuer à produire en tirant tout le parti de sa situation de monopole (gain de 10). En revanche, si NV décide d'entrer, alors M à intérêt à céder, puisqu'alors il s'assure un gain positif (égale à 4), tandis que s'il ne cède pas, il encourt une perte (de 3).

Dans ces conditions, NV, qui anticipe les choix de M en se mettant à sa place décide d'entrer, ce qui lui permet d'obtenir un gain strictement positif. Ce jeu semble comporter une *solution* claire : NV entre et M cède.

La méthode que nous venons d'utiliser pour résoudre ce problème est appelée *récurrence à rebours* (en anglais, backward induction), car elle consiste à raisonner à partir de la fin. La solution suggérée par cette méthode est appelée un *équilibre parfait.* Sur l'arbre du jeu, cette méthode se traduit par un élagage progressif des branches, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que le noeud initial (choix de celui qui agit en premier). Dans notre exemple, l'arbre de Kuhn se réduit à l'arbre représenté par la figure 1.3.

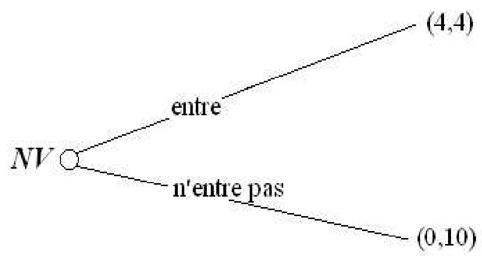


FIG. 1.3 – *Application de la récurrence à rebours.*

Lorsqu'un jeu est représenté par sa forme extensive il est possible d'appliquer la récurrence à rebours qui apparaît comme une méthode de résolution naturelle d'un jeu et qui conduit vers un équilibre parfait. Cependant, l'application de cette méthode peut poser problème lorsque le gain maximal d'un joueur, à l'une des étapes du jeu, est le même pour deux ou plusieurs de ses actions possibles. Pour lever l'indétermination qui s'ensuit, le modélisateur doit préciser comment se fera le choix dans ce cas [Gue95].

D'autre part et dans un jeu à coups simultanés, la méthode de récurrence à rebours ne peut plus être appliquée systématiquement, il faut alors se donner un autre concept de solution qui conduit à une autre méthode permettant de privilégier certaines issues du jeu, en prenant toujours comme référence le principe de rationalité.

1.5.2 Équilibre de Nash

L'équilibre de Nash doit son nom au mathématicien et économiste américain John F. Nash [Nas50a, Nas50b, Nas51, Kre92, Dry91] qui a introduit ce concept en 1950. Cette notion d'équilibre désigne une situation où chacun des joueurs maximise ses gains une fois connu le choix des autres. Plus précisément, un équilibre de Nash est une combinaison de stratégies, une par joueur, telle que personne n'aurait pu augmenter strictement son gain en retenant une stratégie différente de celle que lui attribue cette combinaison, une fois connues les stratégies des autres joueurs qui y figurent. Ceci peut être résumé, de façon un peu vague, en disant qu'un équilibre de Nash est une situation où aucun joueur n'a intérêt à changer sa stratégie, au vu du choix des autres. Cependant, selon Bernard Guerrien [Gue95], la meilleur façon de caractériser l'équilibre de Nash consiste à voir en lui une situation de *non regret* : il y a équilibre de Nash si chaque joueur ne regrette pas le choix qu'il a effectué après avoir constaté celui des autres.

De façon plus formelle, nous pouvons définir un équilibre de Nash comme suit : soit un jeu non coopératif à n joueurs et S l'ensemble des stratégies pures possibles dans ce jeu, $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ une combinaison de choix stratégiques de ces n joueurs où s_1^* est le choix stratégique du joueur 1, s_2^* est le choix stratégique du joueur 2 et ainsi de suite. De plus, soit $u_i(s_1^*, ..., s_n^*)$ le gain du joueur i lorsque s^* est sélectionné, où i peut être n'importe quel joueur $i = 1, 2, ..., n$. Une combinaison de choix stratégiques $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ est un équilibre de Nash si $u_i(s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*) \geq u_i(s_1^*, ..., \hat{s_i^*}, ..., s_n^*)$ pour toute stratégie $\hat{s_i^*}$ dans S et tout joueur i. (Pour plus de détails voir [Sch96, Dry91, Sch01]).

Considérons le jeu du dilemme du prisonnier représenté par sa forme stratégique du tableau 1.1, le couple de stratégies ($Avouer, Avouer$) auquel correspond le vecteur de gains $(1, 1)$ est un équilibre de Nash. Dans ce cas, le raisonnement suivi par chaque joueur est comme suit : « *Si mon adversaire avoue, j'ai intérêt à avouer pour éviter d'être emprisonné pour une longue durée. Cependant, s'il garde le silence, j'ai aussi intérêt à avouer pour pouvoir être libérer* ». Dans ce cas, il est clair que dans les deux cas la stratégie *Avouer* est la stratégie qui sera jouée par chacun des deux joueurs. Ainsi le couple de stratégies ($Avouer, Avouer$) est un équilibre de Nash.

Une méthode simple pour trouver les équilibres de Nash dans un jeu à partir de sa forme stratégique consiste, pour le joueur en ligne (resp. colonne), de fixer à chaque fois une colonne (resp. ligne) et marquer la case qui donne un maximum de gain. Chaque case marquée par les deux joueurs définie un équilibre de Nash. L'application de cette méthode dans le cas du dilemme du prisonnier donne la forme stratégique représentée par le tableau 1.2. Les cases qui seront marquées par i et j représentent un équilibre de Nash en stratégies pures.

		Joueur j	
		Garder le silence	Avouer
Joueur i	Garder le silence	$(3, 3)$	$(0, 5)$ **j**
	Avouer	$(5, 0)$ **i**	$(1, 1)$ **i, j**

TAB. 1.2 – *Recherche des équilibres de Nash dans le jeu du dilemme du prisonnier.*

1.5.3 Résolution des jeux par élimination des stratégies dominées

Un joueur rationnel ne doit jamais utiliser une stratégie *dominée* dans le sens où elle est dominée en terme de gains par au moins une autre de ses stratégies face à toutes les stratégies possibles de ses adversaires. Lorsque nous sommes opposés à un joueur rationnel, nous pouvons supposer que ce dernier n'utilisera jamais une telle stratégie, nous pouvons donc l'éliminer de son ensemble de stratégies possibles. Une manière de déterminer les équilibres d'un jeu consiste à éliminer en premier toutes les stratégies dominées puis de rechercher dans le jeu réduit les équilibres. Pour illustrer cette méthode, considérons le jeu représenté par sa forme stratégique du tableau 1.3.

		Joueur j	
		Stratégie A	Stratégie B
Joueur i	Stratégie C	$(4,4)$	$(4,4)$
	Stratégie D	$(0,1)$	$(6,3)$

Tab. 1.3 – *Jeu à deux personnes ayant deux stratégies.*

Dans ce jeu, la stratégie B du joueur j *domine faiblement* sa stratégie A car sa stratégie B est équivalente à sa stratégie A lorsque le joueur i a opté pour la stratégie C $(4 = 4)$, et strictement meilleur lorsque le joueur i a opté pour la stratégie D $(3 > 1)$. Si le joueur i pense que le joueur j est rationnel, il s'attend à ce que ce dernier ne recoure jamais à sa stratégie A. Le joueur i éliminera donc la stratégie A de l'ensemble des stratégies possibles du joueur j. Dans ce cas, la matrice des gains réduite est donnée par le tableau 1.4. Face

		Joueur j
		Stratégie B
Joueur i	Stratégie C	$(4,4)$
	Stratégie D	$(6,3)$

Tab. 1.4 – *Jeu à deux personnes ayant deux stratégies.*

à la seule stratégie B du joueur j, le joueur i a le choix entre la stratégie C associée à un gain de 4 et la stratégie D associée à un gain de 6. Si ce dernier est rationnel, il optera pour la stratégie D. Avec cette méthode et en éliminant les stratégies dominées (même faiblement dominées), nous avons déterminé l'équilibre de ce jeu et les gains associés.

La procédure d'élimination des stratégies dominées peut quelquefois aboutir à une réduction significative du nombre des équilibres de Nash. Par exemple, l'application de la méthode décrite précédemment pour trouver les équilibres de Nash dans le cas du jeu représenté par le tableau 1.3 donne deux équilibres de Nash (C, A) et (D, B) tandis que la résolution du jeu par élimination des stratégies dominées aboutit à un seul équilibre (D, B).

1.5.4 Pas d'équilibre, trop d'équilibres

Il est important de noter que tous les jeux n'ont pas d'équilibres qui peuvent être déterminés par une simple exploration de la matrice des gains. De plus, certains jeux sont caractérisés par des équilibres multiples, c'est-à-dire de multiples combinaisons de choix stratégiques satisfaisant à la définition d'un équilibre de Nash.

Soit l'exemple de pile ou face introduit au début de ce chapitre. Dans cet exemple, le prisonnier a le choix entre prendre la clé qui est dans la main droite du policier ou celle qui se trouve à sa main gauche. Nous considérons que si le prisonnier trouve la bonne clé il sera satisfait tandis que le policier ne le sera pas. La satisfaction du prisonnier sera représentée par un gain de 1 tandis que la déception du policier sera représentée par une perte de 1. Ce jeu peut être représenté par la matrice des gains du tableau 1.6.

		Policier	
		Mettre la bonne clé dans la main droite	Mettre la bonne clé dans la main gauche
Prisonnier	Choisir la main droite	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
	Choisir la main gauche	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

TAB. 1.6 – *Jeu de pile ou face.*

Dans ce jeu, nous remarquons que les intérêts des deux joueurs sont totalement opposés, ce type de jeu est connu sous le nom de *jeu à somme nulle.* Il est clair dans ce jeu qu'il n'y a aucun équilibre de Nash en stratégies pures puisque aucun couple de stratégie ne peut définir une situation d'équilibre pour les deux joueurs. Ainsi se trouve posé le problème même de l'existence d'équilibres pour certains jeux.

Un jeu peut aussi avoir plusieurs équilibres en stratégies pures. Considérons, par exemple, le jeu du « Monopole-Nouveau Venu » représenté par la forme extensive de la figure 1.1. La forme stratégique correspondante à ce jeu est donnée par le tableau 1.7. Ce

		Monopole	
		cède	ne cède pas
Nouveau Venu	entre	$(4, 4)$	$(-3, -2)$
	n'entre pas	$(0, 10)$	$(0, 10)$

TAB. 1.7 – *Jeu du Monopole-Nouveau Venu.*

jeu comporte deux équilibres de Nash, auxquels sont associés les vecteurs de gains $(4, 4)$ et $(0, 10)$. Le fait qu'il y ait plusieurs équilibres est une source importante d'indétermination qui nous conduit toujours à se poser la question suivante : « lequel des équilibres sera atteint ? ».

Comme nous venons de le constater, des jeux, même très simples, peuvent ne pas avoir d'équilibre de Nash, ou même en avoir plusieurs. Dans ces deux types de situation, qui n'ont rien d'exceptionnelles, il y a donc une indétermination : les données du modèle ne permettent pas de donner un rôle privilégié à certaines issues. Afin de contourner la difficulté, les théoriciens des jeux ont proposé de faire intervenir des probabilités au moment de la prise de décision. Dans ce cas, plutôt que de retenir une action ou une suite d'actions, les joueurs affectent des probabilités aux choix des actions qu'ils doivent adopter. Nous disons alors qu'ils font appel à des *stratégies mixtes*, plutôt qu'à des stratégies pures. Le problème d'évaluation des gains dans le cas des stratégies mixtes sera résolu par l'adoption du principe de l'*espérance mathématique* (pour plus de détails voir [Gue95, vD95, Wei95]).

1.6 Jeux répétés

La vie économique et sociale ayant indéniablement un caractère répétitif. Les échanges, la production et, plus généralement, les interactions, se reproduisent dans des conditions semblables, ou presque, pendant de longues périodes. Dans ce contexte, il semble logique d'intégrer la répétition dans les modèles de jeu, avec pour perspective de faire apparaître des phénomènes importants et présents dans la vie réelle. D'où l'idée de considérer les *jeux répétés*, qui permettent aussi de revenir sur des situations, telle celle décrite par le dilemme du prisonnier, où les choix individuels rationnels conduisent à des solutions nettement *sous-optimales*. Les théoriciens des jeux ont cherché à montrer que les comportements de type coopératif (consistant par exemple à *ne pas avouer* dans le dilemme du prisonnier) peuvent être justifiés du point de vue de la rationalité individuelle, à condition d'adopter une approche par les jeux répétés.

1.6.1 Jeu à horizon fini

Un jeu est dit à *horizon fini* s'il est répété un nombre fini de fois et que les joueurs ont connaissance du nombre exact de répétitions.

Si un jeu est répété un nombre fini de fois, le dernier coup, même s'il est extrêmement lointain, peut avoir une influence décisive sur la forme prise par l'ensemble des équilibres. Pour reprendre un exemple classique, que le jeu du dilemme du prisonnier soit répété deux fois ou deux milliards de fois, il ne comporte qu'un seul équilibre de Nash où les deux joueurs avouent toujours. Ce résultat découle de l'application du principe de la récurrence à rebours (paradoxe du pendu) : au dernier coup, chacun a intérêt à avouer (stratégie dominante) et aucune menace ne peut l'empêcher de le faire puisque le jeu s'arrête. Le même raisonnement sera fait pour l'avant dernier coup, et ainsi de suite. Ce résultat conduit à considérer les jeux répétés un nombre fini de fois comme étant des jeux à un seul coup pour pouvoir trouver les différents points d'équilibres qui peuvent exister dans le jeu. Dans ce contexte, les équilibres de Nash, s'ils existent, dans un jeu à un seul coup définissent les équilibres dans le jeu répété un nombre fini de fois.

Une autre façon pour étudier les jeux répétés une infinité de fois consiste à introduire une certaine dose d'incertitude sur le nombre de coups à jouer, même très faible, et donc relâcher quelque peu l'hypothèse d'information complète. Il suffit pour cela que chaque joueur ne soit pas tout à fait sûr que les autres ont un comportement parfaitement rationnel (pour plus de détails voir [Gue95]). Cependant, dans notre cas, nous nous intéressons uniquement aux jeux à information complète, ce qui réduit l'analyse des jeux répétés un nombre fini de fois à un jeu simple à un seul coup.

Dans la théorie des jeux classique, et en particulier dans le domaine économique, la résolution d'un conflit consiste à chercher les différentes situations d'équilibre qui peuvent exister. Ainsi, nous considérons que chaque joueur est complètement rationnel dans le sens où il choisit une action qui maximise son utilité compte tenu de ses opinions subjectives. Dans ce contexte, nous allons étudier la méthode de calcul des équilibres, en stratégies pures et mixtes la plus répandue en microéconomie et qui a été présentée, par exemple, par Hal R. Varian [vD95].

1.6.1.1 Application en microéconomie

Dans beaucoup de jeux, la nature des interactions stratégiques suggère qu'un joueur souhaite choisir une stratégie qui n'est pas prévisible à l'avance par l'autre joueur. Varian trouve qu'il est naturel d'envisager une stratégie aléatoire consistant à jouer une action a avec une probabilité p_a. Une telle stratégie sera considérée comme étant une stratégie mixte.

Considérons un jeu quelconque à deux joueurs G. Si S est l'ensemble des stratégies pures du joueur i, l'ensemble des stratégies mixtes sera constitué par l'ensemble de toutes les distributions de probabilités sur S, p_s étant la probabilité de jouer la stratégie s de S. De même, si T est l'ensemble des stratégies pures du joueur j, p_t sera la probabilité que le joueur j joue la stratégie t. Pour résoudre le jeu G, il faut trouver un ensemble de stratégies mixtes (p_s, p_t) qui représentent un équilibre. Il se peut que certains équilibres de stratégies mixtes assignent la probabilité 1 à certains choix. Nous les interpréterons dans ce cas comme étant des stratégies pures.

En microéconomie, nous considérons que le point de départ naturel pour la recherche d'un concept de solution est la *théorie standard de la décision.* Dans celle-ci nous supposons non seulement que chaque joueur affecte un certain poids de probabilité aux stratégies que peut choisir l'autre joueur mais aussi que chaque joueur choisit une stratégie qui maximise son espérance de gain.

Supposons maintenant que le gain du joueur i soit $u_i(s,t)$ s'il joue s et le joueur j joue t. Ainsi, i a une distribution de *probabilités subjectives* concernant les choix du joueur j que l'on notera par π_t. Ici π_t est supposée indiquer la probabilité, telle que l'envisage i, que j choisisse la stratégie t. De même, le joueur j a son opinion sur le comportement de i, que l'on notera par π_s.

Nous allons noter par p_s la stratégie mixte *effective* du joueur i et par p_t la stratégie mixte *effective* du joueur j. Puisque i prend sa décision sans connaître celle de j, la probabilité que i affecte à la réalisation d'une combinaison particulière (s,t) sera $p_s\pi_t$. Ceci exprime simplement la probabilité *objective* que i joue s multiplié par sa probabilité *subjective* que j joue t. En conséquence, l'objectif de i est de choisir une distribution de probabilité p_s qui maximise son espérance de gain :

$$\text{Espérance de gain de } i = \sum_{s\in S}\sum_{t\in T} p_s\ \pi_t\ u_i(s,t).$$

Le joueur j, de son côté, cherche à maximiser son espérance de gain :

$$\text{Espérance de gain de } j = \sum_{t\in T}\sum_{s\in S} p_t\ \pi_s\ u_j(s,t).$$

Dans cette méthode, nous avons simplement appliqué un modèle théorique standard de la prise de décision où chaque joueur cherche à maximiser l'espérance de son utilité compte tenu de ses conjectures.

1.6.1.2 Calcul des équilibres de Nash

Pour calculer l'équilibre de Nash, nous supposons que chaque joueur cherche à établir une *conjecture* raisonnable sur ce que feront les autres joueurs. Pour ce faire, le joueur doit se demander ce qu'imaginent les autres joueurs concernant ce qu'il va faire.

Nous rappelons que S (parcouru par s) est l'ensemble des stratégies pures du joueur i et T (parcouru par t) l'ensemble des stratégies pures pour j. Le comportement du joueur i (le degré de vraisemblance attaché à chacune des stratégies) est représenté par la distribution de probabilité p_s. Les conjectures du joueur j sur le comportement de i sont représentées par la distribution de probabilités (subjectives) π_s.

Une condition naturelle de compatibilité est que la conjecture de chaque joueur sur les choix de l'autre coïncide avec les choix effectifs que l'autre joueur s'apprête à faire. les anticipations qui sont compatibles avec les fréquences effectives sont quelquefois appelées des *anticipations rationnelles*. Dans ce contexte, nous définissons l'équilibre de Nash comme étant un type particulier d'équilibre d'anticipations rationnelles. Plus formellement, un équilibre de Nash est constitué des *conjectures* relatives aux probabilités associées aux stratégies (π_s, π_t) et des *probabilités* associées au choix des stratégies (p_s, p_t) telles que :

1. les conjectures sont correctes : $p_s = \pi_s$ et $p_t = \pi_t$ pour tout s et t,
2. chaque joueur choisit (p_s) et (p_t) de façon à maximiser l'espérance de son utilité compte tenu de ses conjectures.

Une définition plus conventionnelle est qu'un *équilibre de Nash* est une *paire de stratégies mixtes* (p_s, p_t) telle que le choix de chaque joueur maximise l'espérance de son utilité compte tenu de la stratégie de l'autre joueur. Cette définition est équivalente à la précédente, mais elle est trompeuse dans la mesure où la distinction entre les conjectures des joueurs et leurs actions est masquée. Dans ce cas, comment calculer l'équilibre de Nash en stratégies mixtes ?

Les Multiplicateurs de Lagrange et de Kuhn-Tucker

Les multiplicateurs de Lagrange [ET99] définissent un outil mathématique qui permet de ramener un problème d'optimisation sous contraintes à une optimisation sans contraintes. On se ramène ainsi au calcul de la racine d'une équation non linéaire.

Soit x^* une solution optimale au problème d'optimisation :

$$\min_x f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{tel que } h_j(x) = 0 \qquad j = 1, ..., m.$$

Pour une solution optimale x^* où les gradients $\{\nabla h_j(x^*) | j = 1, ..., m\}$ sont linéairement indépendants il existe des multiplicateurs de Lagrange λ_j^* uniques tels que :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

Kuhn et Tucker [Roc72, RV88, Mer95] ont étendu la méthode des multiplicateurs de Lagrange à la résolution du problème général qui inclut des contraintes d'égalité et d'inégalité. En programmation non linéaire, les conditions de Kuhn-Tucker expriment des solutions partielles au problème pouvant se résumer à :

$$\min_x f(x)$$

sujette à :

$$\begin{aligned} h_j(x) &= 0 \qquad j = 1, ..., m. \\ g_k(x) &\geq 0 \qquad k = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Si x^* est une solution du problème, il existe alors m multiplicateurs λ^* et n multiplicateurs μ^* tels que :

- $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x)$,
- $\nabla f(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$,
- $h_j(x^*) = 0 \qquad j = [1...m]$,
- $g_k(x) \leq 0 \qquad k = [1...n]$,
- $\mu_k^* g_k(x) = 0 \qquad k = [1...n]$,
- $\mu_k \geq 0 \qquad k = [1...n]$.

Dans le cas des contraintes d'égalité, les conditions de K-T se ramènent aux conditions d'optimum de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Soit par exemple le problème linéaire suivant :

$$\text{Minimiser} \quad f(x) = x_1^2 - x_2 \quad \text{avec :}$$

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 - 1 \geq 0, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 26. \end{gathered}$$

Calcul des gradients :

$$\begin{array}{lcl} f(x) = x_1^2 - x_2 & \Rightarrow & \nabla f(x) = [2x_1; -1] \\ h_1(x) = x_1 + x_2 - 6 & \Rightarrow & \nabla h_1(x) = [1; 1] \\ g_1(x) = -x_1 + 1 & \Rightarrow & \nabla g_1(x) = [-1; 0] \\ g2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 26 & \Rightarrow & \nabla g_2(x) = [2x_1; 2x_2] \end{array}$$

Conditions de Kuhn-Tucker :

- $2x_1 + \lambda_1 - \mu_1 + 2\mu_2 x_1 = 0 \qquad (1)$
- $-1 + \lambda_1 + 2\mu_2 x_2 = 0 \qquad (2)$
- $x_1 + x_2 - 6 = 0 \qquad (3)$
- $-x_1 + 1 \leq 0 \qquad (4)$
- $x_1^2 + x_2^2 - 26 \leq 0 \qquad (5)$
- $\mu_1(x_1 - 1) = 0 \qquad (6)$
- $\mu_2(x_1^2 + x_2^2 - 26) = 0 \qquad (7)$
- $\mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad \forall \lambda_1$.

À partir de l'équation (6), nous obtenons $x_1 = 1$, avec $\mu_1 \in \mathbb{R}^+$. De l'équation (3), il vient que $x_2 = 5$, les équations (4), (5) et (7) sont satisfaites. Les équations (1) et (2) se ramènent à : $\mu_1 + 8\mu_2 = 3$. Tant que μ_1 et μ_2 $(\forall \lambda_1)$ satisfont cette équation, les conditions de Kuhn-Tucker sont respectées, et par conséquent $x^* = [1; 5]$ est un minimum. Il est important de remarquer que dans le cas des contraintes d'égalité, les conditions de Kuhn-Tucker se ramènent aux conditions d'optimum de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Application des multiplicateurs de Kuhn-Tucker pour résoudre un jeu

Soit le jeu représenté par la matrice des gains du tableau 1.8.

Tout d'abord, nous cherchons les équilibres de Nash en stratégies pures. Ceci implique simplement une exploration systématique des meilleures réponses aux différents

		j	
		A	B
i	A	**(2,1)**	$(0,0)$
	B	$(0,0)$	**(1,2)**

TAB. 1.8 – *Jeu à deux joueurs avec deux stratégies.*

choix stratégiques. Supposons que le joueur j pense que i jouera A. j obtiendra alors 1 en jouant A et 0 en jouant B, de sorte que A est la meilleur réponse de j au choix de i de jouer A. D'autre part, si j joue A, il est alors facile de voir qu'il est optimal pour i de jouer A. Ce raisonnement montre que (A, A) est un équilibre de Nash. Par une argumentation similaire, (B, B) est aussi un équilibre de Nash.

Nous pouvons également résoudre ce jeu de façon systématique en introduisant les stratégies mixtes et en décrivant le problème d'optimisation que chaque joueur doit résoudre. Soit (p_1, p_2) (resp. (p'_1, p'_2)) les probabilités que le joueur i (resp. j) affecte au fait de jouer A et B. Puisque chaque joueur est rationnel et cherche à maximiser ses gains, le problème du joueur i est alors :

$$\max_{p_1,p_2} p_1[2p'_1 + 0p'_2] + p_2[0p'_1 + 1p'_2]$$

$$\text{tel que} \quad p_1 + p_2 = 1, \quad p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0.$$

Cette fonction est appelée la « *fonction objective* » pour le joueur i.
Les fonctions de contraintes utilisées sont alors :

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \Leftrightarrow p_1 + p_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow h(p_1, p_2) = p_1 + p_2 - 1, \\ p_1 \geq 0 \Leftrightarrow -p_1 \leq 0 \Leftrightarrow g_1(p_1, p_2) = -p_1, \\ p_2 \geq 0 \Leftrightarrow -p_2 \leq 0 \Leftrightarrow g_2(p_1, p_2) = -p_2. \end{cases}$$

Soit λ, μ_1 et μ_2 les multiplicateurs de Kuhn-Tucker associés aux contraintes, de sorte que le Lagrangien est de la forme :

$$L = 2p_1p'_1 + p_2p'_2 - \lambda(p_1 + p_2 - 1) - \mu_1 p_1 - \mu_2 p_2.$$

Pour calculer le maximum il suffit d'annuler le gradient de L :

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = 2p'_1 - \lambda - \mu_1 = 0 \Rightarrow 2p'_1 = \lambda + \mu_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_2} = p'_2 - \lambda - \mu_2 = 0 \Rightarrow p'_2 = \lambda + \mu_2.$$

Puisque nous connaissons déjà les solutions de stratégies pures, nous considérons seulement le cas où $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$. Les conditions complémentaires dans le théorème de Kuhn-Tucker impliquent alors que $\mu_1 = \mu_2 = 0$ (puisque $\mu_1 g_1(p_1, p_2) = 0$ et $\mu_2 g_2(p_1, p_2) = 0$). Le résultat obtenu sera alors :

$$\begin{cases} 2p'_1 = p'_2 \\ p'_1 + p'_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad p'_1 = \frac{1}{3}, \quad p'_2 = \frac{2}{3}.$$

Ce résultat indique qu'il est optimal pour le joueur i de jouer une stratégie mixte lorsque $p'_1 = \frac{1}{3}$ et $p'_2 = \frac{2}{3}$.

En suivant la même procédure pour le joueur j, nous trouvons que $p_1 = \frac{2}{3}$ et $p_2 = \frac{1}{3}$. L'espérance de gain de chaque joueur dans cette stratégie mixte peut être facilement calculée en introduisant ces nombres dans la fonction d'objectif. Dans ce cas, l'espérance de gain est de $\frac{2}{3}$ pour chaque joueur. Observons que le gain obtenu si chacun des joueur joue la stratégie qui lui permet d'atteindre l'équilibre de Nash en stratégie pure est largement supérieur à celui de la stratégie mixte. Cependant, les deux joueurs sont rationnels dans le sens où chacun d'entre eux cherche à maximiser son gain. Dans ce cas, le joueur i préfère jouer la stratégie A et sait que le joueur j préfère la stratégie B, ce qui va leur apporter un score de 0 chacun. Ainsi,il semble très difficile de convaincre un des deux joueurs de jouer une stratégie autre que celle qu'il préfère sachant que cette stratégie arrange son adversaire. Dans de telles situations, la stratégie mixte s'avère intéressante même si elle rapporte moins de profits.

1.6.2 Jeu à horizon infini

Le dilemme du prisonnier répété un nombre fini de fois possède un équilibre parfait unique pour lequel les deux joueurs prévoient systématiquement d'avouer. Il est donc impossible d'établir des relations de coopération entre les joueurs. Cependant, dans la vie réelle, lorsque les gens interagissent, ils savent rarement à l'avance combien de temps leur relation durera. Ils savent qu'elle se terminera parce qu'aucun d'entre eux n'espère vivre éternellement, mais ils ne seront pratiquement jamais certains de la date exacte de leur dernière rencontre. Nous parlerons alors de jeux à *horizon infini*. La seule façon pour pouvoir exprimer une telle situation consiste alors à supposer qu'il n'y a pas de dernier coup. Ceci peut poser un problème puisqu'il est notoire que les joueurs, et le monde dans lequel ils vivent, ne sont pas éternels. Nous pouvons toutefois considérer que les joueurs attribuent à chaque coup une probabilité p à l'éventualité que la fin du monde (ou du jeu) aura lieu au coup suivant, leurs calculs porteront alors sur des espérances de gain [Axe84, Bin99, Gue95].

1.6.2.1 Application en microéconomie

La modélisation de ce type d'interaction pour le cas du dilemme du prisonnier répété consiste à introduire un coup aléatoire après chaque répétition qui détermine si le jeu continue ou non. Dans ce type de jeu, la coopération n'est pas nécessairement irrationnelle. Dans un cadre économique, et pour introduire le calcul à l'horizon infini, Binmore [Bin99] utilise un paramètre δ $(0 < \delta < 1)$ appelé *facteur d'escompte* qui permet de mesurer le degré d'impatience d'un joueur en supposant que chaque joueur préfère non seulement recevoir plus de gains que moins, mais également obtenir le gain plus tôt que tard.

Soit S (resp. T) l'ensemble des stratégies pures du joueur i (resp. j) dans un jeu G à un seul coup. S (resp. T) sera l'ensemble des *actions* disponibles pour le joueur i (resp. j) à chaque étape du jeu répété indéfiniment G^{∞}.

Les stratégies pures d'un joueur dans G^{∞} sont très nombreuses. Par conséquent, Nous nous limitons aux stratégies pures qui peuvent être représentées par des automates finis. Ceux qui conviennent aux jeux répétés sont les *automates de Moore*. Un automate fini ne peut se souvenir que d'un nombre fini d'éléments, ne peut suivre toute les histoires possibles d'un jeu répété et ne peut impliquer une description de l'aléatoire. Se limiter aux stratégies qui peuvent être représentées par des automates finis restreint par conséquent le choix des joueurs.

1.6.2.2 Évaluer les flux de revenus

Supposons que le joueur i choisisse la stratégie a et le joueur j la stratégie b et que le joueur i utilise l'action s_n et j utilise l'action t_n à la $n^{\text{ème}}$ étape, à cette étape du jeu, le joueur i obtiendra un paiement de $u_i(s_n, t_n)$. Pour déterminer son paiement total, le joueur i doit par conséquent évaluer son *flux de revenus* défini comme suit :

$$u_i(s_1, t_1), u_i(s_2, t_2), u_i(s_3, t_3), ...$$

La fonction de paiement du joueur i ($u_i : S \times T \to \mathbb{R}$) dans le jeu répété prendrait alors la forme :

$$u_i(a, b) = u_i(s_1, t_1) + \delta u_i(s_2, t_2) + \delta^2 u_i(s_3, t_3) + ... + \delta^{k-1} u_i(s_k, t_k) + ...$$

où δ représente le facteur d'escompte du joueur i.

Exemple

Soit l'ensemble des stratégies définies par les automates finis de la figure 1.4.

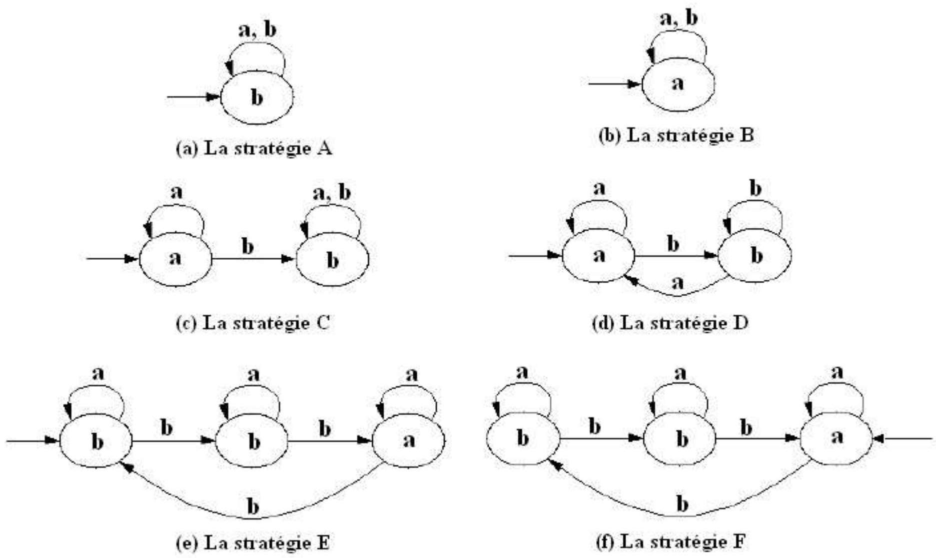


FIG. 1.4 – *Quelques automates finis : a et b définissent les actions possibles, les étiquettes des états indiquent l'action effectué par un joueur, les étiquettes des transitions indiquent les actions effectuées par son adversaire.*

La figure 1.5.a montre ce qui se passe lorsque D (un joueur qui utilise la stratégie D) rencontre E, et la figure 1.5.b montre ce qui se passe lorsque E joue contre F. Nous pouvons remarquer que, dans les deux cas, les deux stratégies finissent par passer continuellement autour de la même suite d'états. Il est aussi important de noter que *n'importe lequel* des deux automates finis jouant l'un contre l'autre dans un jeu répété passera finalement par la même suite d'états indéfiniment.

Le flux de revenus du joueur i à la figure 1.5.a est $0, 1, 1, 6, 0, 1, 1, 6, 0, \ldots$ Ce flux de revenus peut être évalué comme étant une somme escomptée dont le facteur d'escompte δ satisfait $0 < \delta < 1$. Si le joueur i utilise la stratégie D et le joueur j la stratégie E, le joueur i qui évalue les flux de revenus obtiendra ainsi un paiement dans un jeu répété égal à :

$$\begin{aligned}
U_i(D, E) &= 0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3 + 0 + \delta^5 + \delta^6 + 6\delta^7 + \ldots \\
&= (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3) + (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3)\delta^4 + (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3)\delta^8 + \ldots \\
&= (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3)(1 + \delta^4 + \delta^8 + \ldots) \\
&= (0 + \delta + \delta^2 + 6\delta^3)\left(\frac{1}{1 - \delta^4}\right).
\end{aligned}$$

Dans les jeux répétés un nombre *fini* de fois, les flux de revenus sont évalués en utilisant

Cycle Cycle Cycle

i	Paiement	0	1	1	6	0	1	1	6	0	1	1	6	0	1
	Stratégie 'D'	a	b	b	b	a	b	b	b	a	b	b	b	a	b
	ETAPE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
j	Stratégie 'E'	b	b	b	a	b	b	b	a	b	b	b	a	b	b
	Paiement	6	1	1	0	6	1	1	0	6	1	1	0	6	1

(a)

Cycle Cycle

i	Paiement	6	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	Stratégie 'E'	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
	ETAPE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
j	Stratégie 'F'	a	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
	Paiement	0	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

(b)

FIG. 1.5 – *Exemples de paiement.*

un facteur d'escompte $\delta = 1$. Il est impossible de simplifier avec autant d'élégance pour le cas à horizon infini parce que les suites obtenues lorsque $\delta = 1$ divergeront. Par exemple, $0 + 1 + 1 + 6 + 0 + 1 + 1 + 6 + \ldots$ diverge vers $+\infty$. Pour éviter ce cas, Binmore a introduit une autre méthode de calcul qui consiste à évaluer le paiement moyen d'un joueur dans un cycle de jeu.

Il est facile de démontrer que les fonctions d'utilité U_i et $xU_i + y$, $x > 0$ et $y > 0$, représentent les mêmes préférences. Ainsi U_i peut être remplacé par $(1 - \delta)U_i$ sans changer la situation stratégique. Nous pouvons par conséquent considérer la limite quand $\delta \to 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 1}(1-\delta)U_i(A,B) &= \lim_{\delta\to 1}(0+\delta+\delta^2+6\delta^3)\left(\frac{1-\delta}{1-\delta^4}\right)\\ &= \frac{1}{4}(0+1+1+6) = 2.\end{aligned}$$

Ce qui correspond simplement à ce que le joueur i obtiendra en moyenne comme cycle de paiements dans le jeu à étapes.

Un des avantages de travailler avec des automates finis est que cette méthode fonctionne toujours. Lorsque deux automates finis jouent ensemble dans un jeu répété, ils parcourent finalement toujours une suite d'états fixes. Nous supposons que chacun des joueurs évaluera le flux de revenus qu'il obtient en prenant la moyenne des paiements qu'il recevra *pendant ce cycle*. Nous remarquons que cette évaluation ne tient pas compte de la panique au début du jeu et nous supposons que les joueurs ne s'intéressent qu'à ce qui se passe à *long terme*.

L'ensemble des automates finis ayant l'ensemble T (resp. S) comme entrée et l'ensemble S (resp. T) comme sortie sera désigné par A (resp. B). Les ensembles A et B constitueront les ensembles de stratégies pures pour un jeu G^∞ qui sera l'objet final de l'étude. Pour analyser G^∞, il est nécessaire d'introduire les fonctions de paiement : $V_i : A \times B \to \mathbb{R}$. Les définitions utilisent les fonctions de paiement $u_i : S \times T \to \mathbb{R}$ du jeu original G à un seul coup. Si le joueur i choisit l'automate a dans A, et le joueur j choisit b dans B, les deux automates passeront continuellement par la même suite d'états. Supposons que le cycle comporte N étapes, et que les couples d'actions à travers lesquels le cycle des automates passe est $(s_1,t_1),(s_2,t_2),...,(s_n,t_n)$. Le paiement du joueur i dans G^∞ est défini comme étant

$$V_i(a,b) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u_i(s_n,t_n).$$

Le paiement d'un joueur dans G^∞ est ce que le joueur obtient en moyenne pendant le cycle dans lequel s'installe finalement la partie.

Le but principal de cette méthode consiste à fournir un moyen pour évaluer les flux de revenus en évitant les difficultés qui surgissent avec un facteur d'escompte $\delta = 1$. Par exemple, si le joueur i utilise l'automate a correspondant à la stratégie D et le joueur j utilise l'automate b relatif à la stratégie E. La durée de cycle est $N = 4$, et $(s_1,t_1) = (C,D)$, $(s_2,t_2) = (s_3,t_3) = (D,D)$, $(s_4,t_4) = (D,C)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}(V_1(a,b),V_2(a,b)) &= \frac{1}{4}\{(0,6)+(1,1)+(1,1)+(6,0)\}\\ &= \frac{1}{4}(0,6)+\frac{1}{2}(1,1)+\frac{1}{4}(6,0) = (2,2).\end{aligned}$$

Avec cette méthode, il est possible d'évaluer le flux de revenus de chaque joueur dans un jeu à horizon infini. La seule limite consiste à considérer uniquement les stratégies qui peuvent être représentées par des automates finis. Dans ce cas, chaque joueur s'intéresse aux gains obtenus à long terme.

1.6.2.3 Calcul des équilibres de Nash

Dans cette section, nous partons de l'hypothèse que les joueurs évaluent les flux de revenus en terme de paiements moyens à long terme comme nous l'avons décrit précédemment.

Le tableau 1.9 montre la forme stratégique du jeu répété qui résulte quand les joueurs sont contraints de choisir un des automates finis de la figure 1.4.

	A	B	C	D	E	F
A	**(1,1)**	$(6,0)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(2\frac{2}{3},\frac{2}{3})$	$(2\frac{2}{3},\frac{2}{3})$
B	$(0,6)$	$(3,3)$	$(3,3)$	$(3,3)$	$(0,6)$	$(3,3)$
C	$(1,1)$	$(3,3)$	**(3,3)**	**(3,3)**	$(2\frac{2}{3},\frac{2}{3})$	**(3,3)**
D	$(1,1)$	$(3,3)$	**(3,3)**	**(3,3)**	$(2,2)$	**(3,3)**
E	$(\frac{2}{3},2\frac{2}{3})$	$(6,0)$	$(2\frac{2}{3},\frac{2}{3})$	$(2,2)$	**(3,3)**	**(3,3)**
F	$(\frac{2}{3},2\frac{2}{3})$	$(3,3)$	**(3,3)**	**(3,3)**	**(3,3)**	**(3,3)**

TAB. 1.9 – *Forme stratégique correspondante aux automates de la figure 1.4.*

Cette forme stratégique admet 13 équilibres de Nash en stratégies pures (notés en **gras**). Un équilibre de Nash est défini comme étant un couple de stratégies (s,t) de telle sorte que la stratégie s est la meilleure réponse pour le joueur i si le joueur j joue la stratégie t.

Depuis longtemps, les théoriciens des jeux se sont aperçu que la multiplicité des équilibres est une caractéristique des jeux répétés indéfiniment (sauf cas très particulier). Ce résultat est si notoire, qu'il ne peut être attribué à personne en particulier, c'est pourquoi lorsqu'il est énoncé de façon précise on parle à son propos de « *Théorème de tout le monde* » (en anglais, *folk theorem*) [Bin99, Gue95]. Face à la rationalité des joueurs et aux menaces de représailles de la part des autres, chaque joueur peut chercher à déterminer le niveau de gain en dessous duquel il ne peut être contraint par ceux-ci. Ce niveau, dit de *sécurité*, résulte d'une démarche *minimax* : le joueur i détermine son gain maximum pour chacun des choix des autres joueurs, et anticipant d'éventuelles sanctions de leur part, retient la stratégie qui permet de minimiser ce gain maximum. Le gain obtenu de cette façon est généralement appelé *la valeur minimax.* Dans ce contexte, Binmore montre que tout équilibre de Nash dans G^∞ attribut à chaque joueur au moins sa valeur minimax du jeu à un seul coup G [Bin99].

1.7 Stratégies mixtes dans un jeu à horizon infini

Nous avons présenté deux méthodes différentes pour le calcul des équilibres de Nash en microéconomie. La première est appliquée dans le cas des jeux à horizon fini et qui permet de trouver un équilibre de Nash en stratégie mixte, tandis que la deuxième est appliquée dans le cas des jeux à horizon infini, dont les stratégies pures sont représentées par des automates finis et qui donne plusieurs équilibres de Nash en stratégies pures. La question que nous nous posons consiste à savoir s'il est possible d'appliquer la première méthode pour une matrice de gains relative à un jeu répété indéfiniment obtenu en utilisant la seconde méthode.

Dans ce cas, nous estimons trouver l'équilibre de Nash en stratégies mixtes ou pures qui sera atteint parmi l'ensemble des équilibres trouvés. Pour ce faire, nous avons étudié quelques exemples en se limitant aux stratégies pures qui peuvent être représentées par des automates finis. Les résultats obtenus ont montré que dans des cas particulier, il est possible de savoir quel est l'équilibre de Nash qui sera atteint. Cependant, dans d'autres cas, notamment lorsqu'il existe un équilibre dominant ou une stratégie dominante pour chacun des deux joueur, il est inutile, des fois impossible, d'appliquer la méthode qui consiste à chercher un équilibre en stratégie mixte. Dans ce cas, les stratégies jouées peuvent être trouvées en suivant un raisonnement logique et en se basant sur le principe de rationalité. Les différents exemples étudiés ainsi que les résultats obtenus sont décrits dans l'annexe A.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les notions de base de la théorie des jeux classique. L'intérêt principal de cette théorie consiste à étudier les différentes situations de conflit entre les individus en prenant comme hypothèse de base le comportement rationnel des individus dans le sens où chaque individu cherche à maximiser son gain personnel. Nous avons constaté tout au long de ce chapitre que l'analyse des jeux est basée sur la notion d'équilibre et en particulier d'équilibre de Nash qui permet de définir une situation de non regret pour les différents joueurs. Cependant, nous avons aussi constaté qu'il existe des jeux sans ou avec plusieurs équilibres de Nash ce qui conduit à une situation d'indétermination.

Nous avons étudié deux technique différentes pour l'analyse des jeux, la première permet de calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes dans le cas des jeux à horizon fini. La deuxième permet de calculer les flux de revenus de chacun des joueurs dans un jeu à horizon infini, en se limitant aux stratégies qui peuvent être représentées par des automates finis et en supposant que les joueurs évaluent leurs flux de revenus en terme de paiements moyens à *long terme*.

Chapitre 2

Théorie des jeux évolutionnaire

Dans ce chapitre nous allons présenter une autre approche de la théorie des jeux dite « théorie des jeux évolutionnaire ». Elle a été en premier utilisée par les biologistes pour comprendre le comportement animal. Cette théorie cherche à étudier la dynamique de l'évolution et se base principalement sur l'hypothèse d'une population infinie. Pour cela, et après avoir introduit cette théorie et son utilité, nous présentons la technique d'évolution dynamique des populations proposée par John Maynard Smith, et nous étudions par la suite les deux concepts fondamentaux de cette théorie que sont les *stratégies évolutionnairement stables* et les *états stables d'une population*.

2.1 Introduction

La théorie des jeux évolutionnaire s'est développée à la suite des travaux du biologiste John Maynard Smith [SP73, Smi82, Smi74]. Depuis les années 1980 une abondante littérature s'est développée aussi bien en économie qu'en biologie théorique et la théorie des jeux évolutionnaire s'est imposée comme un outil majeur d'analyse dans ces deux disciplines [Wei95, HS98].

Cette théorie est vue comme étant une application de la théorie des jeux classique dans des contextes biologiques, en admettant que la fréquence de la capacité de reproduction introduit un aspect stratégique pour l'évolution. Elle a été développée en premier par R. A. Fisher en 1930 [Fis30] pour expliquer l'égalité approximative dans le rapport de sexe pour les mammifères. Fisher s'est rendu compte que si on mesure la capacité de reproduction d'un individu en terme du nombre prévu des petit-fils, cette capacité dépend de la distribution des mâles et des femelles dans la population.

Ainsi, Fisher a montré que, dans une telle situation, l'évolution dynamique conduit à un rapport de sexe fixe avec un nombre égal de mâles et de femelles. Le fait que la reproduction individuelle dépende de la fréquence relative de mâles et de femelles dans la population introduit un élément stratégique dans l'évolution. Depuis ce résultat, plusieurs études ont été entamées dans le domaine de la théorie des jeux évolutionnaire. Cependant le terme de « théorie des jeux évolutionnaire » a été utilisé pour la première fois en 1961 par R. C. Lewontin [Lew61] qui a introduit la première application explicite de cette théorie en évolution biologique.

Par la suite, en 1972, Maynard Smith définit le concept d'une *stratégie évolutionnairement stable* (ESS) et écrit son livre en 1982 [Smi82] suivi par le travail d'Axelrod en 1984 [Axe84].

Depuis ce temps, la théorie des jeux évolutionnaire a connu un très grand intérêt notamment dans les sciences biologiques, économiques et sociales. L'application de la théorie des jeux évolutionnaire dans les sciences sociales dérive principalement de trois aspects.

Premièrement, l'*évolution* traitée par la théorie des jeux évolutionnaire n'est pas nécessairement une évolution biologique. *Évolution* peut être interprétée comme étant une évolution *culturelle* qui réfère aux changements des croyances et des cultures dans le temps.

Deuxièmement, l'hypothèse de la *rationalité* sur laquelle est basée la théorie des jeux évolutionnaire est, dans la plupart des cas, la plus appropriée pour modéliser les systèmes sociaux.

Troisièmement, la théorie des jeux évolutionnaire, comme étant une théorie *explicitement dynamique*, fournit un élément important qui n'apparaît pas dans la théorie classique.

2.2 Pourquoi la théorie des jeux évolutionnaire ?

La théorie des jeux évolutionnaire a donné de nombreuses réponses à des questions particulières de l'évolution. Un grand nombre de sociologues s'intéressent à cette théorie en espérant avoir des outils permettant de compléter ce qui manque dans la théorie des jeux classique.

2.2.1 Problème de la sélection d'un équilibre

Nous avons introduit dans le chapitre précédent le concept d'équilibre de Nash qui a été la solution la plus utilisée dans la théorie des jeux classique depuis son introduction par John Nash en 1950 [Nas50a, Nas50b]. La sélection des stratégies par un groupe d'individus est mentionnée comme étant un équilibre de Nash si pour chaque individu la stratégie choisie est sa *meilleure réponse* aux autres stratégies choisies par les autres joueurs. Par « *meilleure réponse* », nous voulons dire qu'aucun individu ne peut améliorer son paiement en changeant la stratégie à moins qu'au moins un autre individu change également sa stratégie. Ceci ne signifie pas nécessairement qu'à l'équilibre de Nash, les paiements pour chaque individu sont optimaux. Par exemple, dans le jeu du dilemme du prisonnier, le seul équilibre de Nash qui existe dans lequel les deux individus avouent est sous-optimal. Dans ce cas, il n'est pas évident de considérer l'équilibre de Nash comme étant un concept de solution optimale pour tout type de jeu.

Nous avons montré que si les joueurs sont restreints à utiliser des stratégies pures, il existe des jeux qui ne contiennent pas d'équilibre de Nash. L'exemple du jeu de pile ou face présenté au début du chapitre 1 montre ce cas. Cependant, il est vrai que tout jeu non coopératif dans lequel les joueurs peuvent utiliser des stratégies mixtes a un équilibre de Nash, mais nous pouvons nous poser une question sur ce qu'une stratégie mixte peut avoir comme signification pour des individus réels. S'il semble plus approprié que les individus rationnels adoptent uniquement des stratégies pures, alors les théoriciens de jeu doivent admettre que certains jeux n'ont pas de solutions.

Un autre problème plus significatif, en utilisant l'équilibre de Nash comme étant le concept de solution approprié, apparaît dans des jeux avec plusieurs équilibres. Dans ce cas, comment un individu rationnel peut-il décider quel sera l'équilibre atteint ? Des tentatives pour résoudre ce problème ont fourni un nombre de raffinements possibles pour le concept d'équilibre de Nash, chaque raffinement ayant une acquisition intuitive [Gue95, vDW00]. Ainsi, le problème consiste alors à choisir parmi une variété de subtilités au lieu de choisir entre plusieurs équilibres de Nash. Pour cela, Samuelson, Larry et Zhang [SZ92] espèrent qu'un développement dans la théorie des jeux évolutionnaire peut apporter une solution à ce problème.

2.2.2 Problème d'hyper-rationalité des individus

La théorie des jeux classique impose un degré de rationalité très élevé sur les individus. Cette nécessité est imposée par le développement de la théorie de l'utilité qui est à la base de la théorie des jeux. Par exemple, pour être capable d'assigner une fonction d'utilité fondamentale aux individus, nous assumons typiquement que chaque individu a une définition précise du jeu et un ensemble logique de préférences sur les différents issues du jeu.

De nombreux résultats d'économie expérimentale ont montré que cette hypothèse forte de rationalité ne décrit pas le comportement réel des humains. Un humain est rarement un individu hyper-rationnel comme le décrit la théorie des jeux classique [Gir00]. Par exemple, dans des situations expérimentales, nous rencontrons souvent un comportement où les individus préfèrent A à B, B à C et C à A. Cette défaillance dans la relation de transitivité pour les préférences ne doit pas apparaître si les individus ont une définition précise sur leur ensemble de préférences.

De plus, des expériences avec une certaine classe de jeux montrent l'échec de l'hypothèse du savoir commun typiquement invoqué pour trouver une solution aux jeux. Dans le jeu du dilemme du prisonnier, répété un nombre de fois fini mais important (disons 100), l'issue la plus communément observée entre les deux joueurs est la coopération pendant les 80 premières périodes environ, puis seulement des tentatives d'agression tandis que le seul équilibre de Nash, en théorie des jeux classique, est celui où les deux joueurs avouent mutuellement de la première à la dernière étape [Gir00].

La théorie des jeux évolutionnaire explique avec succès la prédominance de certains comportements d'insectes et d'animaux, où l'hypothèse de rationalité forte est clairement non respectée, ce qui suppose que la rationalité n'est pas un élément principal pour analyser les situations de conflit comme il l'a été déjà considéré. Ce que nous espérons alors, est que la théorie des jeux évolutionnaire puisse permettre avec plus de succès de décrire et prédire le choix des différents individus lorsque nous nous trouvons en face d'hypothèses de rationalité plus faible.

2.2.3 Absence de la dynamique dans la théorie des jeux classique

Von Neumann et Morgenstern [vNM44, DD95] ont montré que leur théorie est complètement *statique* et que la théorie dynamique doit incontestablement être plus complète et par conséquent plus préférable. Mais pour eux il est suffisamment évident qu'il est futile d'essayer de construire une théorie plus complète si le côté statique n'est pas complètement compris.

« *We repeat most emphatically that our theory is thoroughly static. A dynamic theory would unquestionably be more complete and therefore preferable. But there is ample evidence from other branches of science that it is futile to try to build one as long as the static side is not thoroughly understood* ».

La théorie des jeux évolutionnaire est une *théorie dynamique*. Cette théorie permet de modéliser explicitement la dynamique présente dans les interactions entre les individus d'une population. Puisque la théorie des jeux classique ne contient pas de traitement explicite de la dynamique de la réflexion rationnelle, la théorie des jeux évolutionnaire peut être vue comme étant un moyen pour remplir une lacune importante dans la théorie des jeux classique.

En théorie des jeux classique nous pouvons chercher à capturer une certaine dynamique dans le processus *décision-réaction* en modélisant le jeu par sa forme extensive plutôt que sa forme stratégique. Cependant, pour la plupart des jeux d'une complexité raisonnable, la forme extensive du jeu devient rapidement incontrôlable. De plus, même dans la forme extensive du jeu, la théorie des jeux classique représente une stratégie d'un individu comme étant une spécification des choix que doit faire un individu pour chaque ensemble d'informations dans le jeu. La sélection d'une stratégie correspond alors à une sélection de ce que l'individu va faire à chaque étape du jeu. Cette représentation de la sélection d'une stratégie présuppose des joueurs hyper-rationnels et ne peut pas représenter le processus dans lequel un joueur observe le comportement de son adversaire.

Weibull [Wei95] montre qu'avec la notion d'équilibre de Nash, la propriété de *stabilité évolutionnaire*, définie dans la section 2.4, n'explique pas comment une population arrive à une telle stratégie. À la place, elle cherche si, une fois atteinte, une stratégie est robuste dans un cadre d'évolution, ce qui signifie que la théorie des jeux classique ne peut pas suivre la dynamique d'évolution des populations. L'incapacité à modéliser un élément dynamique du jeu dans la théorie des jeux classique et l'incorporation naturelle de la dynamique dans la théorie des jeux évolutionnaire donne un avantage important à la théorie des jeux évolutionnaire.

2.3 Description de l'évolution dynamique d'une population

Deux animaux de la même espèce se disputent un territoire dont la *valeur* en termes de degré d'adaptabilité est V. La *valeur* signifie ici que l'évolution, selon Darwin, d'un individu obtenant le territoire sera augmentée de V. Un individu qui n'obtient pas le territoire nécessaire subira aussi une évolution. Supposons maintenant que ces animaux donnent 5 nouveaux nés s'ils sont dans le territoire approprié et 3 s'ils ne le sont pas. Dans ce cas, la valeur de V sera $5 - 3 = 2$. Ainsi, V représente le *gain* en production pour le gagnant, ceci ne veut pas dire que le perdant n'aura pas de production.

Dans la réalité, les animaux changent souvent leur comportement d'une manière très complexe. Pour le moment, nous supposons que chaque animal peut adopter une stratégie de type *faucon* ou de type *colombe* dans un jeu à coups simultanés et ne changera pas son comportement durant tout le combat. Si les deux se comportent comme des colombes, ils se partagent le territoire. Si l'un se comporte comme une colombe et l'autre comme un faucon, le faucon obtient le territoire. Si les deux se comportent comme des faucons, il y aura un combat qui implique un coût élevé par suite des risques de blessures noté C.

Nous notons H (Hawk[1]) et D (Dove[2]) les deux stratégies faucon et colombe. Il est maintenant possible de donner la matrice des gains représentée par le tableau 2.1.

Si les deux adversaires choisissent de jouer H, chacun des deux a une chance de 50% de blesser son adversaire et obtenir le territoire qui lui rapporte un gain de V. Cependant, il doit aussi subir une perte de coût C due au combat, ce qui rapporte à chacun des deux individus un gain de $\frac{1}{2}(V - C)$.

[1] C'est un terme anglais qui signifie : Faucon
[2] C'est un terme anglais qui signifie : Colombe

	H	D
H	$\frac{1}{2}(V-C)$	V
D	0	$\frac{V}{2}$

TAB. 2.1 – *Forme stratégique du jeu de faucon-colombe.*

Si un des deux adversaires choisit la stratégie H et l'autre la stratégie D, celui qui a choisi H obtiendra le territoire et l'autre se retire sans avoir subi aucune blessure. La valeur 0 pour D ne signifie pas que la population des colombes n'évolue pas. Dans ce contexte, et en appliquant l'exemple numérique précédant, les colombes auront une évolution de 3 individus.

Si chacun des deux adversaires choisit D, le territoire sera partagé équitablement, ce qui donnera un gain de $\frac{V}{2}$ pour chacun des deux adversaires.

Pour analyser la dynamique de l'évolution, John Maynard Smith suppose que la population est *infinie* et que chaque individu adopte une des deux stratégies H ou D choisie de manière aléatoire. Avant le combat, tous les individus ont une même capacité de reproduction W_0 (par exemple 3 nouveaux nés).
Soient :

p	=	la fréquence des individus qui adoptent la stratégie H dans la population,
W(H), W(D)	=	la capacité de reproduction des individus adoptant les stratégies H et D respectivement, et
E(H,D)	=	le paiement pour un individu adoptant la stratégie H contre un individu qui joue D (une notation similaire est utilisée pour les autres paires de stratégies).

Si chaque individu de la population participe au combat nous obtenons :

$$\begin{cases} W(H) = W_0 + pE(H,H) + (1-p)E(H,D), \\ W(D) = W_0 + pE(D,H) + (1-p)E(D,D). \end{cases} \tag{2.1}$$

Si nous considérons, par exemple, que $W_0 = 3$, $V = 2$ et $C = 1$, la capacité de reproduction des faucons dans une population qui contient 50% H et 50% D (c'est à dire $p = \frac{1}{2}$) est :

$$W(H) = 3 + \frac{1}{2}(2-1) + (1-\frac{1}{2})2 = 4,5$$

$$W(H) = 3 + \frac{1}{2}(0) + (1-\frac{1}{2})1 = 3,5$$

ce qui signifie que dans cette population chaque faucon a une capacité de reproduction de 4.5 individus.

Pour une population qui contient 100% de colombes ($p = 0$), la capacité de reproduction de chaque colombe sera de :

$$W(D) = 3 + 0(2-1) + 1 = 4$$

$$W(H) = 0$$

ce qui montre que chaque colombe dans une telle population a une capacité de donner 4 nouveaux nés.

Il est ainsi supposé que les individus se reproduisent de façon non-sexuée, en nombre proportionnel à leur quantité. La fréquence p' des faucons dans la nouvelle population sera alors :

$$p' = p\left(\frac{W(H)}{\overline{W}}\right) \tag{2.2}$$

où

$$\overline{W} = pW(H) + (1-p)W(D).$$

De la même manière, nous pouvons calculer la fréquence des colombes dans la nouvelle population.

L'équation (2.2) a été proposée en 1982 par John Maynard Smith [Smi82] pour décrire la dynamique de la population. En connaissant les valeurs de V et C, et la fréquence initiale de H, il est facile de calculer numériquement comment la population change dans le temps.

D'une manière générale, supposons que les individus puissent adopter un nombre n de stratégies $i,\ j, ...$ Soit $p_i,\ p_i'$ les fréquences des individus adoptant la stratégie i dans deux générations successives. Si W_i est la capacité de reproduction d'un individu adoptant la stratégie i, et $\overline{W}$ est la capacité moyenne de reproduction de toute la population, alors

$$\begin{array}{rl} & W_i = W_0 + \sum_j^n p_j\ E(i,j), \quad \overline{W} = \sum_i^n\ p_i\ W_i, \\ \text{et} & p_i' = \frac{p_i W_i}{\overline{W}}. \end{array} \tag{2.3}$$

L'équation (2.3) décrit la dynamique de la population dans une forme finie. Elle peut aussi être écrite de la manière suivante :

$$p_i' - p_i = p_i(W_i - \overline{W})/\overline{W}.$$

En admettant qu'il n'y ait pas un grand changement entre deux générations, l'équation précédente peut être remplacée par une équation différentielle :

$$dp_i/dt \ = \ p_i(W_i - \overline{W})/\overline{W}. \tag{2.4}$$

Puisque la partie droite de l'équation (2.4) est toujours divisée par la même fonction $\overline{W}$, cette évolution sera identique à :

$$dp_i/dt \ = \ p_i(W_i - \overline{W}). \tag{2.5}$$

L'équation (2.5) a été proposée par Taylor et Jonker [TJ78], ainsi que Zeeman [Zee79, Zee81] pour étudier une dynamique continue dans la théorie des jeux évolutionnaire. De même, cette équation a été utilisée par Eigen et Schuster [ES77] pour décrire la concentration des différents types de molécules. Il est nécessaire de noter que ce type d'évolution est largement utilisé lorsque nous étudions l'évolution des populations infinies dont la reproduction se fait de manière non-sexuée. Il est aussi important de noter que dans notre étude, nous nous limitons aux cas discrets dans le sens où l'ensemble des stratégies est fini. L'évolution continue a été étudiée par I. Eshel [Esh81] et A. Grafen [Gra79] qui ont introduit d'autres critères pour la *stabilité évolutionnaire* d'une stratégie lorsque l'ensemble des stratégies est continu, par exemple l'intervalle entre 0 et 1 pour le rapport de sexe. Dans ce cas, Eshel a introduit la notion d'une stratégie *évolutionnairement stable* qui est aussi *continuellement* stable, et Ulrich Berger [Ber98] a utilisé des équations différentielles pour étudier la dynamique continue d'une population.

2.4 Stratégie évolutionnairement stable

Dans cette section nous introduisons la notion d'une *Stratégie évolutionnairement stable* (en anglais : Evolutionarily Stable Strategy « ESS ») introduite par John Maynard Smith et Price [SP73, Smi82] en 1973. Ce concept a été par la suite analysé et étudié par plusieurs théoriciens des jeux [Wei95, Joh99, Ber01].

2.4.1 ESS selon Maynard Smith et Price

Selon Maynard Smith et Price, une stratégie définit un phénotype : c'est une spécification sur le comportement d'un individu pour toute situation dans laquelle il peut se trouver. Une stratégie est dite évolutionnairement stable si tous les membres de la population adoptent cette stratégie et aucun mutant (individu qui a changé son comportement) ne peux envahir cette population.

« *An ESS is a strategy such that, if all the members of a population adopt it, then no mutant strategy could invade the population under the influence of natural selection* ».

John Maynard Smith et Price [SP73, Smi82] ont donné des conditions mathématiques pour qu'une stratégie soit évolutionnairement stable en se basant sur des hypothèses précises sur la nature d'évolution. Les hypothèses essentielles qui ont été utilisées dans leur modèle consistaient à considérer que la population est *infinie*, la reproduction est non-sexuée, les combats se font par paire et que chaque paire de concurrents est considérée comme étant deux adversaires qui ont les mêmes aptitudes (c'est à dire un combat *symétrique*). Ils considèrent qu'il y a un ensemble fini de stratégies alternatives, ce qui permet d'exprimer le jeu par sa forme stratégique.

Soit I une stratégie stable. Dans ce cas, elle doit avoir la propriété que, si tous les membres de la population adoptent I, alors la capacité de reproduction des membres de cette population est supérieure à celle de tout autre mutant. Dans le cas contraire, si le mutant peut envahir la population, la stratégie I n'est pas stable.

Considérons une population constituée principalement par I, avec une petite fréquence p d'un certain mutant J. Alors, comme dans l'équation (2.1) :

$$\begin{cases} W(I) = W_0 + (1-p)E(I,I) + pE(I,J), \\ W(J) = W_0 + (1-p)E(J,I) + pE(J,J). \end{cases} \tag{2.6}$$

Puisque I est stable, $W(I) > W(J)$. En considérant que $p \ll 1$, il est évident que, pour tout $J \neq I$,

$$\begin{cases} \textit{soit} \quad E(I,I) > E(J,I) & (a) \\ \textit{ou} \quad E(I,I) = E(J,I) \textit{ et } E(I,J) > E(J,J). & (b) \end{cases} \tag{2.7}$$

Toute stratégie qui satisfait les conditions de l'équation (2.7) est une « *stratégie évolutionnairement stable* » (ESS). Ces conditions seront par la suite référées comme des *conditions standards* pour une ESS, mais il faut prendre en considération qu'elles seront appliquées uniquement dans le cas du modèle particulier proposé par Maynard Smith et Price.

Nous pouvons utiliser les conditions de l'équation (2.7) pour trouver une ESS pour le jeu de faucon-colombe dont la forme stratégique est représentée par le tableau 2.1. Dans ce jeu, il est clair que D n'est pas une ESS, car $E(D,D) < E(H,D)$, ce qui montre qu'une population où les individus ont un comportement d'une colombes peut être envahie par un individu qui se comporte comme un faucon. H est une ESS si $\frac{1}{2}(V-C) > 0$

($E(H,H) = \frac{1}{2}(V - C)$, $E(D,H) = 0$), ou $V > C$. En d'autres termes, s'il n'y a pas beaucoup de risque de blessure pour obtenir le territoire.

Que peut-il arriver si $V < C$? Dans ce cas, ni H ni D ne sont une stratégie évolutionnairement stable. Pour répondre à cette question, considérons que nous avons une stratégie I qui consiste à jouer H avec une probabilité p et D avec une probabilité $1-p$. Lorsqu'un individu se reproduit, il transmet à son descendant non pas H ou D mais une probabilité p de jouer H, le paiement des différents jeux dans ce cas sera additif.

La stratégie I est appelée une « *stratégie mixte* » à la différence des stratégies pures qui n'impliquent aucun élément stochastique. Dans ce cas, existe-t-il une valeur de p pour laquelle la stratégie I est une ESS ? Pour pouvoir répondre à cette question, nous utilisons le théorème suivant prouvé par Bishop et Cannings [BC78] :

Théorème 1. *Si I est une ESS mixte incluant, avec une probabilité non nulle, les stratégies pures $A, B, C, ...$, alors :*

$$E(A,I) = E(B,I) = E(C,I) = ... = E(I,I).$$

Si $E(A,I) > E(B,I)$ alors il est intéressant d'adopter plus souvent la stratégie A et moins souvent B. Si c'est le cas, la stratégie I n'est plus une ESS. Cependant, si I est une ESS, les paiements attendus par les différentes stratégies composant I doivent être égaux. Dans ce contexte, il est important de noter que s'il existe une valeur p pour laquelle la stratégie I est une ESS pour le jeu de faucon-colombe, alors nous pouvons trouver p par la résolution de l'équation

$$E(H,I) = E(D,I).$$

Par conséquent

$$pE(H,H) + (1-p)E(H,D) = pE(D,H) + (1-p)E(D,D). \tag{2.8}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{2}(V - C)p + V(1-p) = \frac{1}{2}V(1-p) \Rightarrow p = V/C. \tag{2.9}$$

Plus généralement, pour la matrice représentée par le tableau 2.2, il existe une stratégie

	I	J
I	a	b
J	c	d

TAB. 2.2 – *Forme stratégique d'un jeu symétrique à deux stratégies pures.*

évolutionnairement stable mixte si $a < c$ et $d < b$. L'ESS consiste à adopter une stratégie I avec une probabilité :

$$p = \frac{(b-d)}{(b+c-a-d)}. \tag{2.10}$$

D'après l'équation (2.8), nous avons :

$$\begin{aligned} & p\ a + (1-p)\ b = p\ c + (1-p)\ d \\ \Rightarrow\ & p\ (b+c-a-d) = b - d \\ \Rightarrow\ & p = \frac{(b-d)}{(b+c-a-d)}. \end{aligned}$$

Puisque nous considérons que $p > 0$,

$$\left\{\begin{array}{l}(d-b)>0\\(b+c-a-d)>0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a<c\\d<b\end{array}\right.$$

Pour le jeu de faucon-colombe, s'il existe une ESS de la forme $I = p\ H + (1-p)\ D$, alors la valeur de p sera donnée par l'équation (2.9). Ainsi, il faut que I satisfasse l'équation (2.7.b). Dans ce cas, la stabilité nécessite que $E(I, D) > E(D, D)$ et $E(I, H) > E(H, H)$ (voir l'équation (2.7.b)). Nous obtenons alors :

$$\left\{\begin{array}{l}E(I,D) = p\ V + \frac{1}{2}(1-p)V \ > \ E(D,D),\\ E(I,H) = \frac{1}{2}p\ (V-C) \ > \ E(D,D),\ \text{lorsque}\ \ V<C.\end{array}\right.$$

Nous avons montré que, lorsque $V < C$, une stratégie mixte avec $p = V/C$ est évolutionnairement stable. Maynard Smith indique que dans le cas où le coût du combat est supérieur à la récompense d'une victoire, il est recommandé d'utiliser une stratégie mixte. Dans un contexte biologique, la réalisation d'une ESS mixte dépend de l'hypothèse qu'un génotype peut exister avec une probabilité spécifique et donne une espèce réelle.

2.4.2 ESS selon Weibull

La notion d'une stratégie évolutionnairement stable (ESS) a été également définie par Weibull [Wei95] qui l'a considérée comme étant un concept de base dans la théorie des jeux évolutionnaire :

« *A key concept in evolutionary game theory is that of an evolutionarily stable strategy [...] The incumbent strategy is said to be evolutionarily stable if, for each such mutant strategy, there exists a positive invasion barrier such that if the population share of individuals playing the mutant strategy falls below this barrier, then the incumbent strategy earns a higher payoff than the mutant strategy* »

Dans ce contexte, Weibull donne une autre définition pour une stratégie évolutionnairement stable qui est proche de celle donnée par Maynard Smith. Elle cherche à trouver la portion dans la population des individus adoptant une stratégie mutante en dessous de laquelle ces individus ne peuvent pas envahir la population initiale. Cependant, l'approche décrite par Weibull est mise au point dans le cas des interactions symétriques en paire d'individus dans une grande population *finie*. Il montre que ce concept n'est plus valable dans le cas des interactions entre plus de deux individus à la fois. De plus, Weibull suppose que les paiements dans un jeu représentent le gain en capacité de reproduction biologique ou alors une certaine valeur de reproduction selon la forme d'interaction en question. Ses études ont été consacrées au cas des jeux symétriques à deux joueurs.

Dans ce qui suit, l'ensemble des stratégies pures sera noté $S = \{1, 2, ..., s\}$, et l'ensemble des stratégies mixtes appropriées $\triangle = x \in \mathbb{R}^S_+ : \sum_{i \in S} x_i = 1$. Le paiement pour une stratégie $x \in \triangle$ jouant contre la stratégie $y \in \triangle$ est écrit par $u(x, y) = x.Ay$, où A est la matrice de paiement pour le joueur 1.

Supposons qu'un petit groupe de mutants apparaisse dans une grande population dont tous les individus jouent une certaine stratégie (pure ou mixte) $x \in \triangle$. Supposons aussi que tous les mutants adoptent une certaine autre stratégie mutante (pure ou mixte) $y \in \triangle$. Soit ϵ la portion des mutants dans la population, où $\epsilon \in (0, 1)$. Par conséquent, si un individu est impliqué dans le jeu, la probabilité que son adversaire joue la stratégie mutante y est ϵ, et la probabilité que son adversaire joue la stratégie originale x est $1 - \epsilon$. Le paiement d'un individu dans cette population bimorphique (deux stratégies différentes sont présentes) sera le même que celui d'un individu qui joue contre une stratégie mixte $[w = \epsilon y + (1-\epsilon)x] \in \triangle$. Le paiement pour la stratégie originale sera alors $u(x, w)$ et pour la stratégie mutante $u(y, w)$.

Weibull considère qu'une stratégie évolutionnaire est sélectionnée par rapport à une stratégie mutante si et seulement si son paiement est supérieur à celui de la stratégie mutante :

$$u[x, \epsilon y + (1-\epsilon)x] > u[y, \epsilon y + (1-\epsilon)x]. \tag{2.11}$$

Dans ce contexte, une stratégie $x \in \triangle$ est dite *évolutionnairement stable* si cette inégalité est vérifiée pour toute stratégie mutante $y \neq x$ où la portion dans la population des mutants est largement petite.

Définition 1. *$x \in \triangle$ est une stratégie évolutionnairement stable (ESS) si pour toute stratégie $y \neq x$ il existe un certain $\bar{\epsilon}_y \in (0,1)$ tel que l'inégalité (2.11) est vérifiée pour tout $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_y)$.*

Soit $\triangle^{ESS} \subset \triangle$ l'ensemble (peut être vide) des stratégies évolutionnairement stables dans le jeu étudié. Il est facile de vérifier que chaque ESS est nécessairement optimale envers elle même. Si une stratégie x n'est pas optimale envers elle même, alors il existe une autre stratégie y qui obtient un paiement contre x supérieur à celui de x contre elle même. En conséquent, si la population contient une portion ϵ d'une telle stratégie mutante y qui est suffisamment petite, alors, elle aura un gain contre une population de w supérieur à celui de x, et ainsi, x n'est pas une stratégie évolutionnairement stable. Ainsi, Xin Yao [Yao96] a prouvé qu'aucune stratégie, pure ou mixte, ne peut être évolutionnairement stable si la proportion de mutants dans la population est suffisamment élevée.

Weibull montre formellement que toute stratégie évolutionnairement stable représente une stratégie d'un équilibre de Nash symétrique[3], ce qui revient à :

$$\triangle^{ESS} \subset \triangle^{NE}. \tag{2.12}$$

Où $\triangle^{NE}$ représente l'ensemble des stratégies des équilibres de Nash symétriques, ce qui signifie que, si $x \in \triangle^{NE}$ alors le couple (x, x) est un équilibre de Nash.

Proposition 1. $\triangle^{ESS} = \{x \in \triangle^{NE} : u(y,y) < u(x,y)\ \forall y \in \beta^*(x),\ y \neq x\}$.

Une manière équivalente pour aboutir à ce résultat consiste à dire qu'une stratégie $x \in \triangle$ est évolutionnairement stable si et seulement si elle satisfait ces deux conditions :

$$u(y,x) \leq u(x,x) \quad \forall y, \tag{2.13}$$

$$u(y,x) = u(x,x) \Rightarrow u(y,y) < u(x,y) \quad \forall y \neq x. \tag{2.14}$$

Ces deux conditions caractérisent la stabilité évolutionnaire. En effet, c'est la définition originale d'une ESS introduite par Maynard Smith et Price.

Nous pouvons conclure que si $(x, x) \in \triangle^2$ est un équilibre de Nash strict dans le sens où il donne un meilleur score par rapport aux autres équilibres, alors x est par défaut évolutionnairement stable, et il n'y a donc pas d'alternative qui donne une meilleure réponse. La stabilité évolutionnaire n'implique pas généralement que la capacité moyenne

[3]Un équilibre de Nash est dit symétrique s'il est composé d'un couple de la même stratégie

de reproduction $u(x,x)$ soit maximale. Par exemple, dans le jeu du dilemme du prisonnier, la stratégie $x = Avouer$ est la seule meilleure réponse pour toute stratégie $y \in \triangle$ et donc la seule ESS qui existe dans le jeu. Cependant, cette stratégie n'est pas optimale puisque les deux joueurs peuvent obtenir un meilleur gain en coopérant.

2.5 États stables d'une population

Dans la section précédente nous avons introduit la notion de stratégie évolutionnairement stable mixte et nous avons montré que, théoriquement, il est toujours possible de trouver une ESS mixte de telle sorte que la population adoptant cette stratégie ne puisse pas être envahie par une petite portion d'individus adoptant une stratégie mutante. Cependant, comme pour toute stratégie mixte, nous pouvons nous demander que peut signifier jouer une stratégie mixte dans la vie réelle et notamment dans un contexte biologique. Ce problème a été discuté par John Maynard Smith [Smi82] qui a cherché à comparer le concept d'une stratégie évolutionnairement stable avec une population dans une situation d'évolution stable, et il a trouvé qu'il est plus rentable de chercher quels sont les états stables vers lesquels la population évoluera.

Supposons que la stratégie stable pour un jeu particulier nécessite qu'un individu choisisse de jouer I avec une probabilité p et J avec une probabilité $1 - p$. Dans ce cas, la stratégie non-envahie est une ESS mixte. Alternativement, une population peut contenir des individus qui jouent toujours I et d'autres qui jouent toujours J, une telle population peut alors évoluer vers un équilibre stable où les deux types d'individus sont présents ; en d'autres termes, vers un état polymorphe évolutionnairement stable. La question que l'on se pose consiste à savoir si les probabilités dans les deux situations coïncident. C'est à dire, si l'ESS mixte consiste à jouer I avec une probabilité p, est-il vrai que la population polymorphe stable contient une proportion de p individus qui jouent toujours I ?

Pour pouvoir répondre à cette question nous considérons le jeu de faucon-colombe représenté par la forme stratégique du tableau 2.1. Nous avons vu que si $V < C$, nous ne pouvons pas trouver une ESS pure. Cependant, il est possible de trouver un polymorphisme génétiquement stable qui consiste à avoir une mixture de reproduction pure des faucons et des colombes qui est génétiquement stable.

Considérant maintenant une population constituée par des faucons (H) et des colombes (D) avec une fréquence de P et $(1 - P)$ respectivement. A l'équilibre, les capacités de reproduction $W(H)$ et $W(D)$ doivent être égaux. Ce qui donne :

$$P\ E(H,H) + (1-P)E(H,D) = P\ E(D,H) + (1-P)E(D,D). \tag{2.15}$$

L'équation (2.15) est identique à l'équation (2.8), où p est remplacé par P. Si p donne la fréquence de H dans l'ESS mixte, et P la fréquence de H dans la population à l'équilibre génétique, alors $P = p$. Cette conclusion reste aussi vérifiée si nous avons plus de deux stratégies pures. Mais le polymorphisme génétique est-il stable ? John Maynard Smith a prouvé que s'il n'y a que deux stratégies pures et si la stratégie mixte est stable alors le polymorphisme génétique l'est aussi. Dans ce cas, pour le jeu de faucon-colombe, le polymorphisme génétique avec une fréquence de $P = V/C$ des H dans la population est stable. Malheureusement, si nous avons plus de deux stratégies pures, cette conclusion simple n'est pas toujours valide. Il est possible qu'une stratégie mixte soit évolutionnairement stable, tandis que le polymorphisme génétique correspondant est instable, et vice versa.

Dans le cas général, la relation entre une ESS et les états stables d'une population est beaucoup plus complexe. Taylor et Jonker en 1978 [TJ78], ainsi que Zeeman en 1979 [Zee79] ont établi des conditions pour lesquelles nous pouvons conclure l'existence d'un état stable en considérant une stratégie évolutionnairement stable. Ainsi, ils ont montré que si nous n'avons que deux stratégies pures, alors, à partir d'une stratégie évolutionnairement stable (qui peut être mixte), l'état de la population correspondant est un état stable. Si l'ESS est une stratégie mixte S, l'état correspondant de la population est l'état dans lequel la proportion de la population qui suit la première stratégie est égale à la probabilité assignée à cette première stratégie par S, et le reste suit la seconde stratégie. Cependant, ceci n'est pas toujours vérifié si nous avons plus de deux stratégies pures.

Dans [Smi82], John Maynard Smith a étudié la relation entre une stratégie évolutionnairement stable et un état stable d'une population en considérant la dynamique décrite par les équations (2.3) et (2.5) dans lesquelles seul un ensemble fini de stratégies $i,\ j, ...$ peut exister et évoluer. Un état stable est alors un polymorphisme génétique stable qui contient une mixture d'individus jouant des stratégies pures. À la différence, une stratégie mixte qui satisfait l'équation (2.7) peut être adoptée par un seul individu.

En considérant que le vecteur $\tilde{p}_p$ représente les fréquences des types dans une population polymorphe, et le vecteur $\tilde{P}_s$ les fréquences des actions dans une stratégie mixte, les résultats obtenus par Maynard Smith peuvent être résumé comme suit (pour plus de détails voir [Smi82] :

1. Dans chacun des types de la dynamique, discret ou continu, si une stratégie $\tilde{P}_s$ satisfait l'équation (2.7) contre une invasion par toute autre stratégie, pure ou mixte, alors une population d'individus adoptant $\tilde{P}_s$ est stable contre toute invasion.
2. Si seulement deux stratégies pures sont possibles, il existe toujours un état stable. Si une stratégie mixte $\tilde{P}_s$ satisfait les conditions (2.7), alors une population d'individus jouant $\tilde{P}_s$ et la population polymorphe correspondante $\tilde{p}_p$ sont stables.
3. Si plus que deux stratégies sont possibles, et si la dynamique est continue, alors si une stratégie mixte $\tilde{P}_s$ satisfait l'équation (2.7) contre une invasion par toute autre stratégie, pure ou mixte, alors la population polymorphe correspondante $\tilde{p}_p = \tilde{P}_s$ sera aussi stable.
4. Un polymorphisme, $\tilde{p}_p$, peut être stable tandis que la stratégie mixte correspondante ne satisfait pas les conditions de l'équation (2.7).

2.6 Problèmes philosophiques de la théorie des jeux évolutionnaire

Depuis son introduction, la théorie des jeux évolutionnaire a intéressé beaucoup de monde, notamment les sociologues et les philosophes. Cependant, ceci n'a pas empêché de lever plusieurs questions philosophiques, principalement en ce qui concerne son application dans des sujets réels.

2.6.1 Application dans des interprétations d'évolution culturelle

Comme nous l'avons déjà noté, les modèles de la théorie des jeux évolutionnaire peuvent souvent donner des interprétations biologiques ou culturelles. Dans l'interprétation biologique, la quantité numérique, qui joue un rôle analogue à l'*utilité* en théorie des jeux classique, correspond à la capacité de reproduction des individus. Cependant, comment pouvons nous interpréter cette capacité de reproduction dans un domaine d'évolution culturelle ?

Dans plusieurs cas, la capacité de reproduction dans des interprétations d'évolution culturelle en théorie des jeux évolutionnaire mesure directement une certaine quantité d'un objectif pour lequel il est assumé que les individus cherchent toujours à avoir plus de gains que moins. Avec cette interprétation nous limitons les types de problèmes qui peuvent être adressés. Un cadre plus important en évolution culturelle doit fournir une théorie plus générale qui n'impose pas que la capacité de reproduction des individus soit une fonction linéaire (ou strictement croissante) d'une certaine quantité réelle.

Dans la théorie des jeux classique, la capacité de reproduction ou le gain obtenu par une certaine stratégie ont été mesurés par l'utilité prévue pour l'individu en question. Cependant, la théorie des jeux évolutionnaire cherche à décrire les individus d'une rationalité limitée tandis que la théorie d'utilité employée en théorie des jeux classique assume que les individus ont une rationalité forte. En conséquence, la théorie d'utilité utilisée en théorie des jeux classique ne peut pas être portée de manière simple vers la théorie des jeux évolutionnaire. Nous devons donc développer une théorie alternative adéquate pour l'application de la théorie des jeux évolutionnaire dans un champ d'évolution culturelle.

2.6.2 Simplification du monde réel

Une autre question à laquelle s'affronte la théorie des jeux évolutionnaire consiste à chercher comment cette théorie peut être appliquée dans le domaine réel. En étudiant cette approche nous avons constaté que les résultats obtenus sont purement théoriques et souvent ne reflètent pas le comportement réel des individus ou se limitent à des cas particuliers dont certaines hypothèses doivent être respectées.

Par exemple, dans la vie réelle les individus ne changent pas trop leur comportement aquis à la naissance. Le modèle proposé par Maynard Smith et Price ne reste plus valable car il ne prend pas en considération plusieurs points essentiels dans l'analyse des comportements, comme par exemple le lien génétique qui peut exister entre les différents individus.

Un individu peut rencontrer plusieurs fois le même adversaire. Dans ce cas, si nous ne considérons aucun cas d'apprentissage à partir des expériences, les conclusions obtenues par le modèle de Maynard Smith et Price restent valides. Cependant, s'il existe un apprentissage, les stratégies que nous avons considéré pour trouver une stratégie évolutionnairement stable et pour étudier les états stables d'une population ne restent plus valide.

L'hypothèse principale qui a été utilisée dans le modèle étudié consiste à considérer que la population est infinie. Cependant, il est possible d'avoir une population où l'évolution est considérée comme non seulement finie mais aussi faible. Si c'est le cas, le modèle de base sera mis en cause, puisque les mutants peuvent être très rares (les jeux avec une population finie ont été traités par Riley [Ril78]).

En théorie des jeux évolutionnaire, il est souvent considéré que les combats sont symétriques et se font par paire d'individus. Le jeu de faucon-colombe que nous avons précédemment décrit est symétrique dans le sens où les deux adversaires commencent le jeu dans la même situation : ils ont les mêmes choix de stratégies et les mêmes perspectives de paiement. Cependant, les combats les plus actuels sont asymétriques. Ces combats peuvent être entre un mâle et une femelle, un vieux et un jeune, un petit et un grand individu, ou entre un propriétaire de la ressource contre un autre qui ne l'a pas. Une asymétrie peut être perçu préalablement par l'individu, si c'est le cas, cela peut souvent influencer ses actions. Il est évident que l'asymétrie altère les paiements et affecte le résultat prévu pour chacun des deux adversaires. Il est également vrai qu'une asymétrie qui n'a pas d'influence sur les paiements ou le succès d'un individu peut déterminer le choix des actions.

Le modèle du jeu de faucon-colombe, et des modèles plus complexes exprimés par une matrice de paiement, supposent qu'un individu s'engage dans un ou plusieurs combats pair à pair. Dans ce contexte, si plus qu'un seul combat apparaît, nous supposons que les paiements seront combinés de façon additive. Un tel modèle peut être appliqué dans des combats pair à pair ou dans une forme symétrique tel qu'un combat entre deux mâles ou deux femelles, ou entre un père et son descendant. Cependant, il existe plusieurs situations dans lesquelles un individu se trouve en face d'un combat contre une population entière d'individus ou une partie de cette population. En effet, un tel combat avec une équipe est probablement plus fréquent, ce qui le rend plus important qu'un combat avec un seul individu.

2.7 Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre la théorie des jeux évolutionnaire qui constitue aujourd'hui un pilier essentiel de la théorie des jeux, et qui a révolutionné notre compréhension à la fois de certains phénomènes biologiques et de la théorie des jeux classique elle-même. Nous avons montré que l'idée principale sous-jacente aux jeux évolutionnaires est que ce n'est plus la rationalité de chaque individu qui le pousse à adapter son comportement aux stratégies de ses adversaires, mais une évolution propre à l'ensemble de la population à laquelle il appartient, et dont il est simplement un acteur parmi d'autres. Nous avons étudié les deux concepts de base de cette théorie que sont les ESS et les états stables d'une population et nous avons montré que lorsqu'un jeu contient uniquement deux stratégies pures ces deux concepts coïncident souvent. Cependant, la théorie des jeux évolutionnaire est purement théorique, elle est généralement basée sur des modèles simplifiés de la vie réelle, comme tout autre modèle de la théorie classique, dont certaines hypothèses de base doivent être respectées.

Chapitre 3

Théorie des jeux computationnelle

Ce chapitre est consacré à l'étude dune troisième approche de la théorie des jeux que nous nommons *théorie des jeux computationnelle*. Elle consiste à étudier et analyser le comportement de différents agents. Après avoir présenté cette théorie du point de vue d'Axelrod puis de Beaufils, Delahaye et Mathieu nous étudions la dynamique d'évolution des populations proposée par cette approche. Nous concentrons par la suite notre présentation aux méthodes de simulation proposées par Beaufils, Delahaye et Mathieu qui sont des outils de base pour l'analyse et la description de tout comportement possible.

3.1 Introduction

Nous avons présenté dans les chapitres précédents quelques exemples de jeux où des individus interagissent et doivent séparément prendre des décisions pour satisfaire leur intérêt personnel. Dans certains cas, ce type de situations est caractérisé par le fait que, d'une part chaque joueur a le choix entre la coopération et la trahison et que, d'autre part, l'intérêt commun est la coopération, alors que l'intérêt individuel est la trahison.

Dans la vie réelle, chaque individu est différent des autres, il a sa façon de voir et d'analyser les choses et peut se comporter de manière assez différente et même inattendue. Le but principal de la théorie des jeux computationnelle consiste à analyser les comportements des différents individus et à expliquer l'apparition de plusieurs phénomènes dans leur comportement tel que la coopération. Cette théorie ne cherche pas à trouver un concept de solution optimale mais plutôt à fournir un moyen efficace permettant de comprendre et d'analyser les différents résultats obtenus compte tenu des caractéristiques des stratégies adoptées.

> « *Under what conditions will cooperation emerge in a world of egoists without central authority ?* »

C'est par cette question que débute le célèbre ouvrage « *The Evolution of Cooperation* » d'Axelrod [Axe84]. Cette question, qui en induit bien d'autres, a intrigué, et intrigue encore, les hommes depuis longtemps. Elle a suscité des nombreuses réponses ou commentaires. Un des plus célèbres nous vient de Hobbes en 1651 [Hob51] qui annonce qu'avant que les gouvernements n'existent, l'état était dominé par des individus égoïstes qui se livraient sans cesse une dure compétition, ce qui rendait la vie courte et dangereuse. Pour lui, toute coopération était impossible en l'absence d'une autorité centrale. Cependant, de nombreux auteurs ont montré que la coopération peut exister dans un monde sans aucun pouvoir central [Chr98]. Parmi les plus marquants, nous pouvons citer Luce et Raïffa, Maynard-Smith ou Axelrod [LR85, Smi82, Axe84].

La théorie des jeux computationnelle permet de mieux cerner l'ensemble des situations possédant cette propriété. Pour pouvoir expliquer ce concept nous allons considérer le jeu du dilemme itéré du prisonnier (pour plus de détails voir par exemple [O'R95]) qui sert de paradigme principal à l'étude de la coopération et dont la forme stratégique générale est représentée par le tableau 3.1. Il est important de noter que la théorie des jeux compu-

M :

		Joueur j	
		Garder le silence	Avouer
Joueur i	Garder le silence	(R, R)	(S, T)
	Avouer	(T, S)	(P, P)

TAB. 3.1 – *Forme générale pour le jeu du dilemme du prisonnier avec* $T > R > P > S$.

tationnelle est applicable pour tout type de jeu à deux joueurs et à information complète et imparfaite. Cette théorie est basée sur la même modélisation que la théorie des jeux classique.

3.2 Description de l'évolution dynamique des populations

Dans notre étude nous supposons que les interactions n'impliquent que deux joueurs agissant simultanément. Nous considérons également que chaque joueur peut se rappeler de la nature de ses échanges avec les autres joueurs, ce qui lui permet de tenir compte de l'historique des différentes interactions. Les hypothèses principales du modèle étudié peuvent être résumées dans ce qui suit :

1. Les joueurs ne disposent d'aucun mécanisme explicite leur permettant de mettre des menaces à exécution ou de prendre des engagements. Dans ce cas, chaque joueur doit prendre en compte toutes les stratégies possibles de l'autre joueur.
2. Il est impossible de savoir avec certitude ce que l'autre va faire à un coup donné, la seule information dont dispose un joueur est l'histoire de ses interactions jusqu'au coup précédent.
3. Il est impossible d'éliminer l'autre joueur ou de se dérober à l'interaction.
4. Il est impossible de modifier les gains de l'autre joueur.

En se basant sur ce modèle, nous allons présenter deux approches différentes de simulation des comportements en théorie des jeux computationnelle. Ces approches permettent d'étudier la dynamique d'évolution des populations, ainsi que l'émergence de la coopération dans le comportement des individus rationnels. La première approche est celle décrite par Axelrod [Axe84] qui permet d'évaluer le comportement d'un ensemble de stratégies jouant à un jeu répété indéfiniment. La seconde est celle proposée par Beaufils, Delahaye et Mathieu [DM96, Bea00] et qui consiste à étudier l'évolution *écologique* des populations dans un jeu à horizon infini.

3.2.1 Évolution selon Axelrod

Axelrod [Axe84] s'est intéressé au problème de la coopération et a apporté des pistes très prometteuses. Pour ce faire, il a utilisé le dilemme itéré du prisonnier et il a indiqué que la coopération pourrait émerger et être stable dans un système même démuni de toute autorité centrale. Cette mise en évidence doit cependant être relativisée car d'autres contraintes peuvent exister dans le système. Bien qu'il n'y ait pas nécessairement besoin d'un pouvoir central pour guider les individus vers la coopération, la définition de contraintes à l'intérieur du système rend moins surprenant l'apparition de la coopération. A l'évidence, la définition de la matrice de gains joue un rôle important dans cette émergence, tout comme les caractéristiques de l'évolution peuvent influencer les choix des participants.

Pour étudier le comportement des différentes stratégies, Axelrod a fait une expérience dans laquelle il a demandé à des personnes d'écrire des programmes informatiques décrivant une stratégie pour jouer de manière optimale au dilemme du prisonnier répété indéfiniment. Chaque stratégie fut testée contre les autres dans une sorte de tournois.

Pour pouvoir étudier le comportement des différents individus, il a décrit une dynamique d'évolution dans un jeu à horizon infini : le nombre de parties est inconnu des participants. Il considère que chaque individu cherche à avoir du gain plus tôt que tard. Dans ce cas, l'importance du gain au prochain coup est plus faible que celui du coup en cours. Pour décrire cette caractéristique, Axelrod utilise un facteur ω, avec $0 \leq \omega \leq 1$, permettant de mesurer le degré d'importance du prochain coup. Plus précisément, ce facteur permet de représenter le degré de réduction de la valeur de chaque coup par rapport au coup précédent. Pour cette raison ω est connu sous le nom de *paramètre de réduction* (en anglais *discount parameter*).

Considérons que $u_i(A,B)$ représente le gain du joueur i jouant la stratégie A contre un autre joueur j utilisant la stratégie B dans un jeu G à un seul coup. Si i et j se rencontrent indéfiniment, le paiement $p_i(A,B)$ obtenu par le joueur i dans G^∞ sera évalué comme suit :

$$\begin{aligned} p_i(A,B) &= u_i(A,B) + \omega\ u_i(A,B) + \omega^2\ u_i(A,B) + ... + \omega^k\ u_i(A,B) + ... \\ &= u_i(A,B)(\omega + \omega^2 + ...\omega^k + ...) \\ &= u_i(A,B)\left(\frac{1}{1-\omega}\right). \end{aligned}$$

Le tournoi effectué par Axelrod contenait deux manches. La première manche comprenait 14 stratégies plus une stratégie *aléatoire* qui fait appel au hasard. Chaque stratégie a été confrontée à chacune des autres dans 5 parties de 200 coups chacune. Dans la seconde manche, chaque stratégie fut confrontée à chacune des autres dans 5 parties de longueur différentes, comptant en moyenne 151 coups chacune, les stratégies utilisées dans cette manche était au nombre de 62 plus la stratégie *aléatoire*.

Dans le premier tournoi, la stratégie *tit-for-tat* (ou Donnant_Donnant), proposée par le professeur de psychologie Anatol Rapoport [RC65], a remporté la compétition contre les 14 autres stratégies bien plus complexes en terme de la taille des programmes. Cette stratégie consiste à coopérer au premier coup, ensuite à chaque coup elle joue ce que son adversaire a joué au coup précédent, c'est ce qui a conduit Axelrod à entamer le deuxième tournoi. Dans ce dernier, le vainqueur fut une fois de plus *tit-for-tat*. À partir de ces simulations, Axelrod a établi toute une série de propositions qui servent de principes généraux pour l'évaluation d'un comportement. Il a cherché à caractériser les stratégies qui réussissaient bien dans des simulations informatiques. Pour lui une *bonne* stratégie est celle qui possède les propriétés suivantes :

- **Bienveillance** : elle ne sera jamais la première à faire cavalier seul (trahir).
- **Réactivité** : elle doit changer son comportement après un changement du comportement de son adversaire.
- **Indulgence** : elle pardonne une fois vengée.
- **Simplicité** : elle doit être comprise facilement.

Axelrod défini comme concept de base la notion de stratégie *collectivement stable* qui ne peut pas être envahie par d'autre stratégies. Dans ce contexte, il montre que *tit-for-tat* est collectivement stable si et seulement si :

$$\omega > \max\{(T-R)/(T-P),(T-R)/(R-S)\}.$$

Pour lui, la notion d'une stratégie collectivement stable est équivalente à celle d'une stratégie évolutionnairement stable et une stratégie S_i est collectivement stable si et seulement si pour toute stratégie S_j :

$$p(S_i,S_i) \geq p(S_i,S_j).$$

Cependant, Boyd et Lorberbaum montrent qu'il n'existe pas une équivalence entre collectivement stable et évolutionnairement stable et prouvent qu'une stratégie collectivement stable peut ne pas être évolutionnairement stable (pour plus de détails voir [BL87, McK03]).

3.2.2 Évolution selon Beaufils, Delahaye et Mathieu

Dans « *The Evolution of Cooperation* », Axelrod a présenté les méthodes utilisées de façon très vague et n'a pas bien spécifié les calculs effectués ce qui nous a empêché de pouvoir les refaire. Dans ses résultats, Axelrod a insisté sur le fait que la stratégie *tit-for-tat* est une *bonne* stratégie. Mais que peut signifier une bonne stratégie ? Si nous la considérons comme étant la stratégie qui batte tout le monde, alors la stratégie *all_d* (ou méchante), qui consiste à toujours trahir, est la meilleure. Cependant si nous considérons que la meilleure stratégie est celle qui fait un meilleur score contre toutes les autres stratégies, nous n'en trouvons aucune, car être meilleure contre *all_d* est impossible.

De plus, l'utilisation du paramètre de réduction ω complique les calculs et conduit toujours à se demander quelle est la valeur attribuée à ce facteur. Pour éviter ce problème, une autre méthode de simulation informatique, basée sur l'approche d'Axelrod, a été proposée par Delahaye et Mathieu [DM96]. Elle consiste à considérer que le jeu est itéré un nombre fini de fois mais que les joueurs ne connaissent pas le nombre d'itérations. Ceci permet d'éviter les complexités de calcul qui surgissent en utilisant le facteur de réduction. Le but principal de cette méthode consiste, non seulement à fournir un outil efficace d'analyse des comportements, mais également de bien décrire l'évolution des populations pour qu'elle puisse être vérifiée par toute personne intéressée.

Dans ce qui suit nous consacrons notre présentation aux outils de simulation qui permettent de comparer les différentes stratégies à l'aide de deux grands types d'évaluations : les *tournois* et les *évolutions écologiques*.

3.2.2.1 Tournoi

La première simulation étudiée consiste à effectuer un tournoi qui cherche à comparer le score obtenu par une stratégie à celui d'une autre stratégie. Plus une stratégie a un score élevé, mieux on la considère.

Existe-t-il une stratégie qui peut faire un score optimal face à n'importe quelle autre stratégie ? Pour répondre à cette question considérons les deux stratégies *all_d*, qui trahit tout le temps, et *spiteful* (ou rancunière), qui coopère jusqu'à ce que son adversaire trahisse, ensuite elle trahit toujours. Si une stratégie S_i peut avoir un score optimal face à toute autre stratégie, elle doit bien se comporter contre *all_d* et *spiteful*. Pour avoir un score optimal face à *all_d* il faut aussi être *all_d* et donc la stratégie S_i va trahir au premier coup. D'autre part, le meilleur comportement à adopter face à *spiteful* est de jouer la stratégie *all_c* (ou gentille) qui consiste à toujours coopérer. Dans ce cas la stratégie S_i doit coopérer au premier coup. Il est donc impossible de trouver une stratégie, pure ou mixte dans un jeu non-coopératif, qui consiste de façon certaine, à coopérer au premier coup contre une stratégie et trahir contre une autre. Ce résultat nous conduit à conclure qu'aucune stratégie ne peut avoir un score optimal face à toute autre stratégie.

Dans le tournoi, nous allons compter les scores gagnés par chaque stratégie face à un ensemble d'autres stratégies et les additionner par la suite. La stratégie qui gagne le tournoi sera celle qui cumule le plus grand nombre de points contre toutes les autres stratégies. Plus formellement, soient S l'ensemble des n stratégies impliquées dans le tournoi et L le nombre de fois que les individus vont se rencontrer, sachant que L est inconnu par les individus. Le score d'une stratégie $s_i \in S$ face à une stratégie $s_j \in S$, noté $p(s_i, s_j)$ sera calculé comme suit :

$$p(s_i, s_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{L} p_k(s_i, s_j)$$

où $p_k(s_i, s_j)$ dénote le score obtenu par la stratégie s_i face à la stratégie s_j à l'étape k du jeu répété.

Calculer le score dans un tournoi revient d'abord à calculer la matrice de gain dans un jeu à deux joueurs et n stratégies, puis à faire la somme des scores par ligne pour obtenir le score de chaque stratégie. Considérons par exemple un tournoi entre les trois stratégies : *all_c*, *all_d* et *tit-for-tat*. Les résultats obtenus pour $L = 1000$ sont donnés par le tableau 3.2.

	all_c	*all_d*	*tit-for-tat*	**Score**
all_c	3000	0	3000	6000
all_d	5000	1000	1004	7004
tit-for-tat	3000	999	3000	6999

TAB. 3.2 – *Un exemple de tournoi avec des parties de 1000 coups.*

Le résultat obtenu montre que la stratégie *all_d* gagne le tournoi. Il est important aussi de noter que le score d'une stratégie dans un tel tournoi inclut le score de la stratégie jouant face à elle-même, ce qui permet de mieux étudier la *robustesse* d'une stratégie. Il semble donc évident que pour être efficace une stratégie doit bien se comporter face à elle-même.

L'évaluation par des tournois nous permet de classer les différentes stratégies jouant ensemble. Cependant, l'inconvénient majeur de cette technique est que les stratégies ne sont pas robustes à la modification de leur environnement. Dans ce cas, une stratégie bonne dans un tournoi n'est que très rarement bonne dans un autre tournoi. Par exemple, dans un tournoi, impliquant les stratégies *all_d*, *tit-for-tat* et *spiteful*, représenté par le tableau 3.3, la stratégie *all_d* obtient un mauvais score.

	all_d	*tit-for-tat*	*spiteful*	**Score**
all_d	1000	1004	1004	3008
tit-for-tat	999	3000	3000	6999
spiteful	999	3000	3000	6999

TAB. 3.3 – *Un autre exemple de tournoi avec des parties de 1000 coups.*

Même si les tournois sont un bon moyen de comparaison de stratégie, une évaluation sérieuse ne peut se contenter de ce manque de robustesse des résultats. Pour cela, une autre technique d'évaluation est utilisée pour étudier le comportement des différentes stratégies à savoir les évolutions écologiques.

3.2.2.2 Évolution écologique

Contrairement aux tournois qui voient parfois gagner des stratégies spécialement adaptées à un environnement déterminé mais incapables de se maintenir quand l'environnement varie, l'évolution écologique est une méthode plus efficace pour l'évaluation des stratégies. Cette évolution permet de réaliser une sélection entre stratégies et n'autorise que la victoire des stratégies *robustes*.

Le principe de l'évolution écologique consiste à considérer plusieurs représentants d'une même stratégie qui constituent l'effectif, ou la taille, de la population pour cette stratégie. Chaque individu rencontre un à un tous les autres individus de la population. Une fois que toutes les rencontres ont eu lieu chacun est alors capable de connaître la valeur de la stratégie qu'il utilise en cumulant les scores obtenus face à toutes les autres. Pour calculer la taille de la population dans la prochaine génération nous partons du principe de la sélection naturelle suggéré par Beaufils dans [Bea00] :

« *moins un individu est fort, moins il a de chance de survivre* »

Dans ce cas, les individus ayant choisi une stratégie qui rapporte peu de points ont tendance à disparaître, alors que ceux ayant choisi une stratégie rapportant plus de point vont croître et multiplier. Il est important de noter que le mécanisme évolutionnaire utilisé est une sorte de reproduction parthénogénétique dans laquelle un individu peut se reproduire tout seul.

Plus formellement, considérons qu'à la génération n il y a trois stratégies A, B, et C. Les A sont d'effectif $W_n(A)$, les B d'effectif $W_n(B)$ et les C d'effectif $W_n(C)$. Le tableau du tournoi sera utilisé pour calculer les évolutions écologiques, il indique les gains correspondant aux combats à deux que peuvent faire les stratégies entre elles. Dans ce cas, nous notons par $V(A, B)$ le gain en points pour A lorsque A joue contre B, une notation similaire sera utilisée pour tous les autres couples de stratégies possibles. Par exemple, dans la matrice du tournoi représentée par le tableau 3.2 $V(all\_c, tit\text{-}for\text{-}tat) = 3000$.

Ainsi, nous supposons que l'effectif total est fixe :

$$\Pi = W_n(A) + W_n(B) + W_n(C) = W_{n+1}(A) + W_{n+1}(B) + W_{n+1}(C) = ... \tag{3.1}$$

Dans ce cas, les points gagnés à la génération n par un A, ou un B, ou un C lorsque chaque individu joue contre tout le monde seront calculés comme suit :

$$\begin{cases} V_n(A) = (W_n(A) - 1)V(A,A) + W_n(B)V(A,B) + W_n(C)V(A,C) \\ V_n(B) = W_n(A)V(B,A) + (W_n(B) - 1)V(B,B) + W_n(C)V(B,C) \\ V_n(C) = W_n(A)V(C,A) + W_n(B)V(C,B) + (W_n(C) - 1)V(C,C) \end{cases} \tag{3.2}$$

Le total des points gagnés par toutes les stratégie en présence à la génération n est :

$$T_n = W_n(A)V_n(A) + W_n(B)V_n(B) + W_n(C)V(C) \tag{3.3}$$

À partir des équations 3.1, 3.2 et 3.3 nous pouvons calculer l'effectif des naissances constituant la population à la génération $n+1$

$$\begin{cases} W_{n+1}(A) = \Pi.W_n(A).V(A)/T_n \\ W_{n+1}(B) = \Pi.W_n(B).V(B)/T_n \\ W_{n+1}(C) = \Pi.W_n(C).V(C)/T_n \end{cases} \tag{3.4}$$

Les résultats obtenus sont arrondis à l'entier inférieur puisque nous utilisons un calcul entier. Le calcul présenté pour 3 stratégies peut être généralisé pour m stratégies avec $m \geq 2$.

Avec les équations reproduites ici et la matrice des gains obtenue dans un tournois, il est possible de calculer la dynamique d'évolution de la population. Par exemple, pour les stratégies *all_c*, *all_d* et *tit-for-tat* dont la matrice du tournoi est représentée par le tableau 3.2. Si nous considérons que l'effectif initial pour chaque stratégie est de 100, le résultat indique que la stratégie gagnante est *tit-for-tat*. Tandis que dans le tournoi la stratégie gagnante était *all_d*, ce qui montre que gagner dans un tournoi ne veut pas dire gagner en évolution écologique. Le résultat de l'évolution écologique est représenté dans la figure 3.1 et le tableau 3.4. Ce résultat a été obtenue grâce aux outils de simulations décrits à la section 3.3.1.

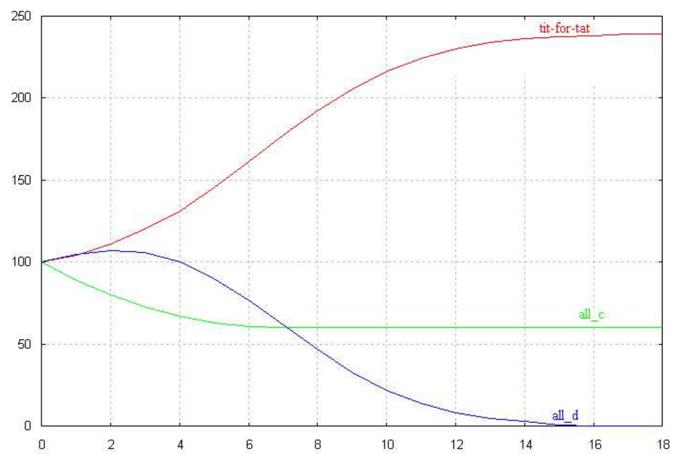


FIG. 3.1 – *Exemple d'évolution écologique.*

Nous pouvons aussi noter que cette simulation est proche de celle utilisée par Maynard Smith en théorie évolutionnaire. Maynard Smith fait ses études dans un cadre continu : il considère que la population est infinie et la représentation des population se fait en

Génération	*all_c*	*all_d*	*tit-for-tat*
0	100	100	100
1	89	105	104
2	80	107	111
3	73	106	120
4	67	100	131
5	63	90	145
6	61	77	161
7	60	62	177
8	60	47	192
9	60	33	205
10	60	22	216
11	60	14	224
12	60	8	230
13	60	5	234
14	60	3	236
15	60	1	237
16	60	0	238
17	60	0	239
18	60	0	239

TAB. 3.4 – *Résultats de l'évolution écologique relative à la figure 3.1.*

pourcentage (avec des nombres réels). Cependant, nous avons noté que la théorie computationnelle cherche à analyser le comportement des différents individus. Elle considère que la population est fini, un individu est indivisible et, à un moment donné, il faut pouvoir lui dicter son comportement. C'est pourquoi cette théorie se situe dans un cadre discret, déterministe et calculable.

Nous avons étudié quelques expériences en modifiant dans le simulateur pour pouvoir, d'une part supporter l'hypothèse qu'un individu est divisible et d'autre part effectuer des calculs en utilisant des pourcentages de populations.

Le premier changement effectué consiste à considérer un calcul avec des nombres réels en utilisant l'équation 3.4. Les résultats obtenus ont montré que le classement des stratégies reste inchangé. La seule différence est dans la dynamique d'évolution dans laquelle nous avons constaté que la population évolue beaucoup plus rapidement et, dans la plupart des cas, finit par se stabiliser. Pour trouver une explication à ce phénomène, nous avons étudié plusieurs exemple et nous avons constaté que la stratégie avec un nombre d'individus $\ll 1$ influe sur le calcul. Dans ce cas, les individus adoptant une telle stratégie sont toujours considérés dans l'effectif total de la population, mais ils ne peuvent pas apparaître dans le calcul effectué par les équations 3.1, 3.2 et 3.3 à cause de la capacité limité des machines dans le calcul flottant.

Pour remédier à ce problème, nous avons proposé un autre programme qui ne prend pas uniquement en considération le calcul réel, mais effectue aussi un arrondi à 0 lorsque le nombre des individus adoptant une certaine stratégie est $\ll 1$. Les résultats obtenus dans ce cas coïncident avec ceux obtenu par la version originale du simulateur (version avec arrondi).

Nous pouvons nous demander que peu signifier un nombre réel d'individus. Est-ce-qu'il est possible d'avoir un demi ($\frac{1}{2}$) ou un quart ($\frac{1}{4}$) d'individu ? Une réponse possible à cette question consiste à ajouter une propriété d'âge ou de force pour caractériser les individus. Nous pouvons considérer qu'un jeune individu est plus fort qu'un autre individu plus âgé. Dans ce cas, malgré le fait qu'ils adoptent la même stratégie, le gain obtenu ne sera pas le même ce qui influe sur le gain total de la population adoptant la stratégie en question.

Pour donner un sens plus significatif aux calculs réels, nous considérons des pourcentages de population à la place du nombre d'individus. Les résultats obtenus ont indiqués qu'il n'y a pas de différences concernant le classement des stratégies, ce qui montre que l'arrondi effectué dans les calculs ne change pas grand chose dans les résultats.

En se basant sur les exemples étudiés, nous avons constaté qu'il est possible d'avoir une différence dans le mouvement dynamique de l'évolution (les oscillations). Les différents exemples étudiés ainsi que les résultats obtenus sont indiqués dans l'annexe B.

3.3 Outils de simulation

3.3.1 Logiciel de simulation

Pour pouvoir analyser les différents calculs des tournois et d'évolutions écologiques nous utilisons des outils de simulation logiciels créés par les membres de l'équipe SMAC [DM96, Bea00] afin de pouvoir gérer l'évolution de stratégies codées sous forme de programmes informatiques pour le dilemme itéré du prisonnier.

Une version de ce simulateur est réalisée en langage Java. Elle offre entre autre trois applets différentes. Tout est disponible sur le site web[1] de l'équipe SMAC du LIFL.

– La première applet permet simplement d'essayer des rencontres entre deux stratégies jouant au dilemme itéré du prisonnier classique, de manière à apprécier le comportement des stratégies. Elle permet aussi de décrire les actions jouées et le score obtenu par chacune des stratégies (une vue de cette applet est donnée par la figure 3.2).
– La seconde applet permet de tester des stratégies, jouant toujours au dilemme itéré du prisonnier classique, via des tournois permettant de comprendre la méthode de base d'évaluation d'une stratégie et donne comme résultat le score obtenu par chacune des stratégies (une vue de cette applet est donnée par la figure 3.3).
– La troisième permet de tester l'évolution d'une population d'individus jouant à n'importe quel jeu à deux joueurs que l'on peut imaginer et définir par sa matrice de gains. Dans ce cas, nous pouvons choisir la taille de chaque population, voir les résultats du tournoi ainsi qu'une représentation graphique de l'évolution écologique de la population (une vue de cette applet est donnée par la figure 3.4).

Une autre version du simulateur est écrite en langage C. C'est une manière optimisée, puissante et efficace de faire de lourdes expériences. Comme la version en Java, ce simulateur permet d'écrire autant de nouvelles stratégies que ce que permet le langage utilisé. Il peut être utilisé sur n'importe quelle plateforme ayant un compilateur C, norme ANSI, pour pouvoir modifier ou créer des stratégies. Les résultats sont stockés dans des fichiers textes et peuvent être représentés graphiquement en utilisant GNUPLOT, avec lequel le programme est interfacé. Ce simulateur est appelé « *prison* » et il est disponible sur le site web[2] de l'équipe SMAC. Ce simulateur permet de dessiner les courbes d'évolution des population, un exemple est donné dans la figure 3.5. Les deux simulateurs utilisent à priori

[1] http ://www.lifl.fr/IPD/applet-match.html
[2] http ://www.lifl.fr/IPD/

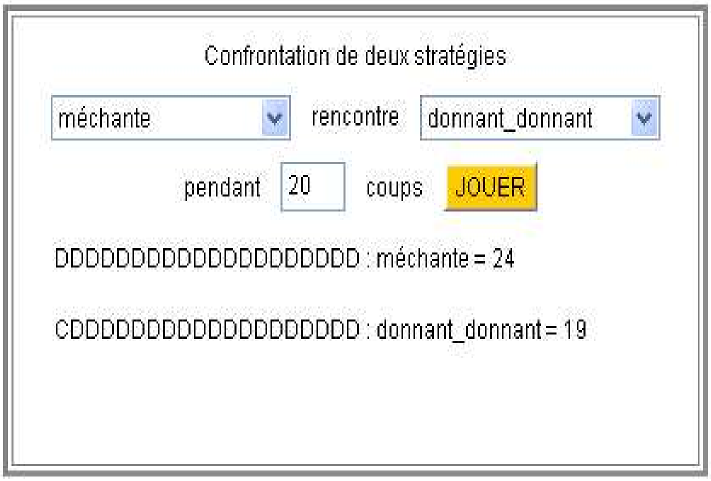


FIG. 3.2 – *Vue de la première applet.*

FIG. 3.3 – *Vue de la deuxième applet.*

les mêmes algorithmes de simulation, tant pour le calcul des parties, des tournois que des évolutions écologiques. Ces algorithmes sont disponibles dans [Bea00]

3.3.2 Classes complètes et sous-classes de stratégies

3.3.2.1 Classes complètes

La théorie des jeux computationnelle ne pose aucune restriction sur la nature des stratégies, ce qui nous permet d'imaginer le plus de comportements possible. Une des méthodes pour obtenir un grand nombre de stratégies consiste à demander à des personnes d'écrire des stratégies jouant au dilemme. Cette méthode a été entre autre utilisée par Axelrod qui en a collecté une soixantaine et Delahaye et Mathieu qui en ont collecté une centaine de stratégies différentes. Ce mécanisme a permis de déduire des résultats plus généraux.

Pour mieux étudier le comportement des différentes stratégies Beaufils [Bea00] a défini

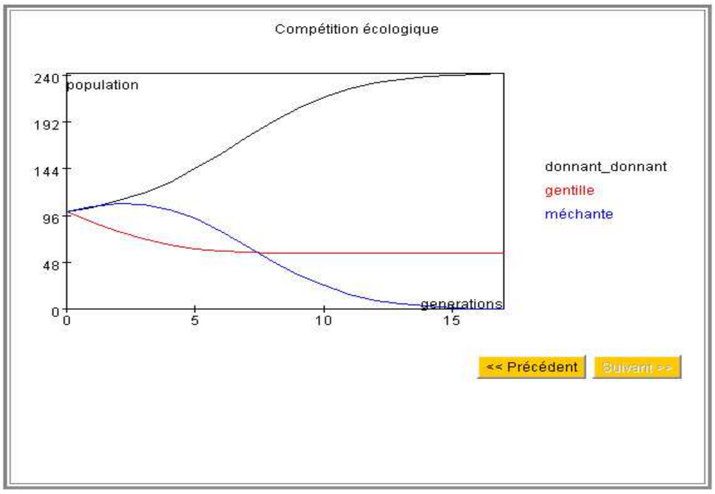


FIG. 3.4 – *Vue de la troisième applet.*

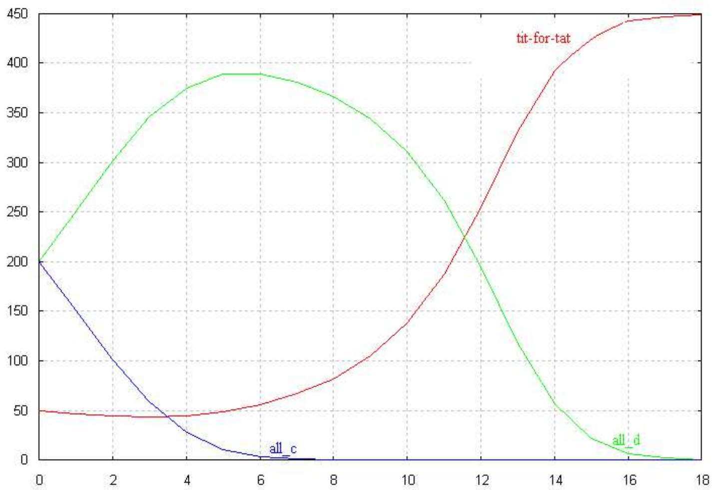


FIG. 3.5 – *Exemple d'un graphe généré par « prison ».*

la notion de *classes complètes* et *sous-classes* de stratégies ayant certaines propriétés particulière. Ce concept permet d'étudier une stratégie particulière dans un environnement homogène pour pouvoir retirer le plus de détails possibles sur son comportement.

L'idée proposée consiste à définir un comportement général en fonction d'un jeu de paramètres, puis d'utiliser toutes les valeurs possibles de ces paramètres comme définition de stratégies différentes.

Nous devons donc décrire une structure (appelée *génotype*) qui peut être décodée en un comportement (appelé phénotype). Une méthode pour avoir une stratégie est alors simplement de remplir cette structure. C'est une manière qui permet d'avoir beaucoup de stratégies en considérant toutes les valeurs possibles pour remplir cette structure. Nous appelons l'ensemble de toutes ces stratégies décrite par un génotype particulier, la classe complète des stratégies de ce génotype.

Les stratégies décrites doivent l'être de manière objective dans le sens où elle ne doit pas impliquer de caractéristiques artificiels. Cette propriété est très intéressante puisqu'elle nous permet d'appliquer cette théorie dans la vie réelle.

Dans [Bea00], Beaufils a décrit trois génotypes basés sur la même idée simple, dans le but de rester objectif. Cette idée consiste à considérer la longueur de l'historique du jeu visible par les joueurs. De telles idées ont déjà étaient étudiées dans [SC96]. Ces trois stratégies sont :

- *memory* : chaque stratégie voit seulement m coups de son passé, et n coups du passé de son adversaire. Le jeu est amorcé par $\max(m, n)$ coups prédéfinis dans le génotype. Tous les autres coups sont codés dans le génotype en fonction de la configuration du passé visible. La longueur du génotype est alors $\max(m, n) + 2^{(m+n)}$. La classe complète sera notée mem_1_1.
- *binary memory* : même chose que pour la précédente, à l'exception du fait que la réponse à l'adversaire ne dépend plus seulement du passé visible, mais aussi du fait que l'adversaire a plus souvent trahis que coopéré, ou non. La longueur du génotype est alors $\max(m, n) + 2^{(m+n+1)}$.
- *memory automata* : nous représentons ici des automates classiques à deux états, qui débutent en l'état 0. Chaque stratégie voit seulement m coups de son passé, et n coups du passé de son adversaire. Le jeu est amorcé par $\max(m, n)$ coups prédéfinis dans le génotype. Tous les autres coups sont codés dans le génotype en fonction de la configuration du passé visible et de l'état courant. Les transitions d'états sont aussi codées dans le génotype. La longueur du génotype est alors $\max(m, n)+2(m+n+2)$.

Le but principal d'utilisation des classes complètes consiste à donner un moyen pour évaluer des stratégies dans de grandes compétitions écologiques. Une évolution écologique est faite entre toutes les stratégies d'une classe, et la stratégie à évaluer.

Pour mieux comprendre la notion de classes complètes considérons les stratégies qui ne se souviennent que de leur dernier coup et du dernier coup de leur adversaire. La taille du génotype pour cette famille est $L = \max(m, n) + 2(m + n) = \max(1, 1) + 2(1 + 1) = 5$, ce qui permet de définir 2^L stratégies différentes. De plus, il est nécessaire pour cette famille de définir les coups joués initialement. Le nombre de ces coups sera égal à $\max(m, n) = \max(1, 1) = 1$.

Nous pouvons définir une de ces stratégies comme suit :

- Le premier coup je joue $\boxed{\text{C}}$ puis :
- $\begin{cases} \text{Si au coup d'avant j'ai joué C et que mon adversaire a joué C alors je joue } \boxed{\text{C}} \\ \text{Si au coup d'avant j'ai joué C et que mon adversaire a joué D alors je joue } \boxed{\text{D}} \\ \text{Si au coup d'avant j'ai joué D et que mon adversaire a joué C alors je joue } \boxed{\text{C}} \\ \text{Si au coup d'avant j'ai joué D et que mon adversaire a joué D alors je joue } \boxed{\text{D}} \end{cases}$

Nous pouvons alors définir le génotype de cette stratégie comme :

C	C	D	C	D

Il est à noter que malgré l'apparente simplicité des stratégies décrites par ces génotypes, un grand nombre de stratégies classiques sont incluses dans ces classes complètes. L'exemple présenté décrit le comportement de la stratégie *tit-for-tat*.

Le résultat d'évolution écologique pour la classe complète mem_1_1 est donnée dans la figure 3.6. Ce résultat montre que la stratégie qui a comme génotype $\boxed{\text{C} \mid \text{C} \mid \text{D} \mid \text{D} \mid \text{D}}$ semble être la meilleure dans ce contexte (c'est la stratégie *spiteful* (rancunière)).

L'idée d'utilisation des classes complètes a permis de bien étudier la robustesse des stratégies, elle a montré que la stratégie *tit-for-tat* ne peut pas gagner dans toutes les

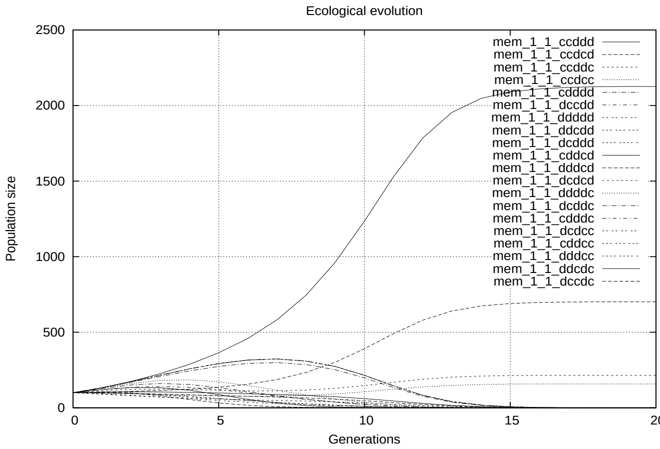


FIG. 3.6 – *Exemple d'évolution écologique avec la classe complète mem_1_1.*

classes complètes utilisées et a permis de définir d'autres stratégies plus robustes telle que *Graduelle*[3] [BDM96] et *Bad_bet*[4] [BDM01] (pour plus de détails sur les résultats obtenus voir [Bea00]).

3.3.2.2 Sous-classes

Une autre notion utilisée pour étudier le comportement des différentes stratégies est celle des *sous-classes*. Elle consiste à étudier la robustesse d'une stratégie dans un ensemble de sous-classes. Pour étudier le comportement d'une stratégie S_i dans l'ensemble S de n stratégies, il est important de tester son comportement dans toutes les sous-ensembles de S. Cependant, le calcul sera plus lourd et lent si le nombre de stratégies dans la classe de départ est grand. Pour faire face à ce problème, nous considérons uniquement les sous-ensembles de taille $n-1$ et $n-2$. Considérons par exemple l'ensemble de 8 stratégies $S =${*all_d*, *all_c*, *tit-for-tat*, *mistrust*, *spiteful*, *bad_bet*, *per_ccd*, *per_ddc*}[5]. Dans cet exemple, nous étudions le comportement des stratégies, en tournoi et en simulation écologique, dans des sous-classes de taille 6 et 7. Les résultats obtenus sont comme suit :

Avec des sous-classes de 6 stratégies : le nombre de sous-classes dans ce cas est de 28 ($C_8^6 = \dfrac{8!}{6!((8-6)!)} = 28$).

– Tournoi :

[3]Elle coopère jusqu'à la première trahison de son adversaire. Ensuite pour chaque trahison elle punis son adversaire par n trahison(s), le calme par 2 coopérations et continue à coopérer. n est le nombre de fois que son adversaire a trahi

[4]Elle coopère jusqu'à ce que son adversaire trahisse. Ensuite elle joue successivement les stratégies *tit-for-tat*, *all_c*, *spiteful* et périodiquement coopérer, coopérer et trahir, pendant 4 coups chacune. Puis elle joue pendant les 4 coups suivants la stratégie qui lui a amené le plus gros score et elle réévalue ce choix tous les 4 coups

[5]Une description complète de ces stratégies peut être trouver dans [Bea00]

Classement	*Stratégie*	*Nombre de victoires*
1	bad_bet	16
2	spiteful	6
3	tit-for-tat	5
4	all_d	1
5	mistrust	0
6	per_ccd	0
7	all_c	0
8	per_ddc	0

– Évolution écologique :

Classement	*Stratégie*	*Nombre de victoires*
1	bad_bet	17
2	spiteful	7
3	tit-for-tat	4
4	all_d	1
5	mistrust	0
6	per_ccd	0
7	all_c	0
8	per_ddc	0

Avec des sous-classes de 7 stratégies : Le nombre de sous-classes dans ce cas est de 8 ($C_8^7 = \frac{8!}{7!((8-7)!)} = 8$).

– Tournoi :

Classement	*Stratégie*	*Nombre de victoires*
1	bad_bet	6
2	spiteful	1
3	tit-for-tat	1
4	all_d	0
5	mistrust	0
6	per_ccd	0
7	all_c	0
8	per_ddc	0

– Évolution écologique :

Classement	*Stratégie*	*Nombre de victoires*
1	bad_bet	6
2	spiteful	1
3	tit-for-tat	1
4	all_d	0
5	mistrust	0
6	per_ccd	0
7	all_c	0
8	per_ddc	0

Ce résultat nous permet de déduire que la stratégie *bad_bet* est une bonne stratégie puisqu'elle est robuste dans les différents environnements étudiés.

3.4 Utilités de la théorie des jeux computationnelle

La théorie des jeux computationnelle présente un outil d'analyse des comportements. Cette théorie ne cherche pas à fournir un concept de solution optimale, mais cherche plutôt à étudier les propriétés des différentes stratégies dans des environnements homogènes.

En théorie des jeux computationnelle aucune restriction n'est donnée sur les stratégies, ce qui nous permet d'avoir un grand nombre de comportements possibles et de déduire des résultats suffisamment généraux. Il est aussi possible d'étudier tout type de jeu, nous parlerons dans ce cas des *méta-jeux* [Del00] qui permettent de modéliser les interactions entre individus dans un cadre dynamique où les règles peuvent changer. Cette caractéristique permet d'appréhender un plus grand nombre de situations d'interactions et de s'approcher un peu plus de la réalité.

Avoir un très grand nombre de stratégies permet de simuler des évolutions écologiques de grande ampleur et donc de tester et évaluer dans des ensembles larges et hétérogènes (les classes complètes) ou des ensembles particuliers (les sous-classes) certaines stratégies construite sur la base de critères particuliers. Ces évolutions permettent de vérifier et valider la qualité de ces critères.

Grâce à la théorie des jeux computationnelle nous pouvons créer des classes complètes et des sous-classes définissant tout type de comportement qui nous vient à l'esprit. Elle nous permet d'évaluer les stratégies que nous supposons être de qualité. Cette évolution permet non seulement de comparer les critères de qualités des différentes stratégies mais aussi de mieux comprendre leur fonctionnement. Dans le contexte de la théorie de la coopération, des évolutions écologiques ont montré que les stratégies gentilles (qui commencent par coopérer) et réactives peuvent avoir un meilleur score que les stratégies agressives (qui commencent par trahir) et non adaptatives.

En explorant systématiquement un grand espace de stratégies nous pouvons espérer trouver des stratégies dont les comportements pourront nous apporter de nouvelles idées de critères de qualité et peut nous conduire à trouver une *bonne* stratégie. L'application de cette théorie a permis de trouver de bonne stratégies telles que Graduelle ou Bad_bet.

Cette théorie permet aussi d'étudier la *robustesse* des différentes stratégies. Ici, la robustesse sera mesurée par l'efficacité d'une stratégie face à de nombreuses stratégies différentes et dans des environnements hétérogènes.

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la théorie des jeux computationnelle qui fournit un outil efficace d'analyse des comportements. Grâce à sa capacité d'expression, il est possible d'étudier le plus de comportement possible permettant d'expliquer les différents phénomènes observés.

Par la suite nous avons consacré notre étude aux outils de simulation proposé par Beaufils, Delahaye et Mathieu. Ces simulateurs fournissent un outil efficace qui permet de tester des comportements dans de très larges environnements stratégiques. Pour ce faire, deux types de simulations ont été proposées : les tournois et les évolutions écologiques. Grâce à cet outil il est possible d'écrire tout type de stratégie et la tester avec un ensemble d'autres stratégies dans un jeu général non-coopératif à deux joueurs.

Plusieurs études dans cette théorie ont été proposé, nous pouvons citer par exemple le travail de Didier Müller en 2001 qui a fournit un outil permettant de calculer les équilibres de Nash étant donné la matrice des gains et d'effectuer des tournois entre deux stratégies. Müller a aussi étudier un cas particulier de conflits, appelé le dilemme géométrique, où chaque individus rencontre uniquement ses voisins. Les simulateurs proposés par Müller sont disponible sur le web[6].

La théorie des jeux computationnelle se développe en économie et en science sociale. C'est une théorie exploratoire et expérimentale qui permet d'étudier les différents comportements en parcourant de grands espaces de stratégies soumises à des conditions différentes. Dans ce contexte, une stratégie est dite robuste si elle se comporte de la même façon dans des environnements différents.

[6] http ://www.ju.ch/lcp/cours/dm/dilemme/home.html

Chapitre 4

Synthèse

Dans ce chapitre nous allons comparer les trois théories des jeux étudiées : classique, évolutionnaire et computationnelle. Nous présentons les particularités de chaque théorie et ses domaines d'application, ainsi que leurs utilités. Les caractéristiques principales de chaque théorie sont, par la suite, récapitulées dans un tableau pour aider le lecteur à mieux clarifier ses idées.

4.1 En quoi consiste chaque théorie ?

Nous avons présenté tout au long de ce document trois approches différentes dans la théorie des jeux. Un des objectifs communs à ces théories consiste à étudier les différentes situations de conflit, où des individus doivent prendre des décisions simultanément et séparément.

Dans la première approche nous parlons de la théorie des jeux classique. Le but principal de cette théorie consiste à chercher une solution optimale pour le jeu en question. Cette théorie se base sur une hypothèse de rationalité très forte, où l'intérêt principal de chaque individu consiste à maximiser son gain personnel.

La théorie des jeux classique estime répondre à une question principale posée par chaque individu en situation de conflit : « *Quelle est la bonne stratégie qui me permet d'avoir un plus grand score* ? ». Pour répondre à cette question, plusieurs études sont apparues dans la littérature depuis les années 40 [vNM44, LR85, Gue95, PR98].

Depuis son apparition, la théorie des jeux classique a connue un grand intérêt notamment chez les économistes, les sociologues et les philosophes pour pouvoir étudier et analyser le comportement des individus dans la vie réelle. La première application de cette théorie était sur des jeux à deux joueurs et un seul coup. Dans ce contexte, les théoriciens ont montré qu'il est possible de trouver une issue du jeu, en stratégie pure ou mixte, qui conduit les deux joueurs à une situation de non regret. Cette situation est considérée comme étant une situation d'*équilibre*.

La notion d'équilibre la plus étudiée est l'équilibre de Nash [Nas50a, Nas50b, Nas51] qui propose une solution à chaque joueur. Cependant, cette solution est dans la plupart des cas non-optimale (le dilemme du prisonnier donne un meilleur exemple). De plus, nous avons montré dans le chapitre 1 qu'il existe des jeux sans équilibre de Nash ou avec plusieurs équilibres. Dans le premier cas, les théoriciens proposent de jouer une stratégie mixte. Mais que peut signifier une stratégie mixte dans la vie réelle ? Dans le deuxième cas, le conflit n'est pas résolu et le joueur cherche toujours à savoir quel est l'équilibre qui sera atteint.

Nous avons indiqué que la théorie des jeux classique se base sur une hypothèse de rationalité très forte. Cependant, dans la vie réelle, plusieurs expériences ont montré que les individus ne sont pas forcément rationnels et donc cette théorie est peu valable pour étudier le vrai comportement des individus.

Nous avons aussi constater que, dans la vie réelle, les individus ont tendance à se rencontrer plusieurs fois et donc il faux avoir un moyen pour prendre en considération ce fait. L'étude des jeux répétés a été introduite en théorie classique. Cette étude est souvent limitée aux stratégies qui peuvent être représentées par des automates finis dans une population finie. Cette considération limite le choix des joueurs et ne permet pas d'étudier tous les comportements possibles. Ainsi, il est à noter que la théorie des jeux classique est purement *statique* ce qui ne permet pas d'étudier les comportements dynamiques qui sont les plus rencontrés dans la vie réelle.

Pour remédier aux différents problèmes posés par la théorie des jeux classique, une autre approche a été introduite. Nous parlons ici de la théorie des jeux évolutionnaire. Cette théorie a été introduite en premier par les biologistes pour étudier le comportement animal. Son but principal consiste à étudier l'évolution dynamique des populations et analyser le comportement des différentes espèces.

Au cours des années 80 des questions sur l'hypothèse de rationalité forte, proposée par la théorie classique, sont devenues un sujet brûlant au sein de la communauté des théoriciens des jeux. Le catalyseur de ce phénomène fut un ensemble d'expériences qui ont montrées qu'un individu a rarement un comportement de rationalité forte. Dans ce contexte, la théorie des jeux évolutionnaire explique avec succès la prédominance de certains comportements où l'hypothèse de rationalité forte n'est pas respectée.

En théorie évolutionnaire un individu ne cherche pas à maximiser son gain personnel mais plutôt à faire partie d'une espèce qui résiste le plus longtemps possible. Dans ce contexte, nous parlons des stratégies évolutionnairement stables et des états stables d'une population.

Nous avons indiqué dans le chapitre 2 que le problème principal de la théorie des jeux évolutionnaire est qu'elle représente une simplification du monde réel. Elle est basée sur un ensemble d'hypothèses qui sont rarement proche du réel, tels que les combats paire à paire, les reproductions non sexuelles, l'utilisation des stratégies mixtes,...etc. C'est une approche purement théorique et souvent représentée par des équations formelles.

La troisième approche en théorie des jeux est la théorie computationnelle. Cette théorie a été proposée pour remplir les lacunes des deux autres théorie.

Le but principal de cette théorie consiste à fournir un outil efficace et complètement automatisable pour étudier et valider les différents comportements. Elle ne pose aucune restriction sur les stratégies utilisées et donc il est possible d'étudier le plus de comportements possible.

Grâce à la notion de classes complètes et des sous-classes, la théorie des jeux computationnelle permet d'explorer un ensemble large de stratégies, d'étudier les particularités dans un comportement d'une stratégie et, dans certains cas, trouver une bonne stratégie. C'est une théorie qui ne propose pas un concept de solution optimale mais cherche à étudier la robustesse d'un comportement dans des environnements (caractéristiques) différents et homogènes.

Avec cette théorie, il est possible d'étudier les jeux répétés à horizon infini. Pour faciliter les calcul, Delahaye, Mathieu et Beaufils proposent que la partie soit répétée un nombre fini de fois mais inconnu par les joueurs. Ce concept est beaucoup plus proche de la réalité car nous savons tous que nos rencontres ne vont pas durer éternellement mais aucun de nous ne peut savoir leur nombre exact.

4.2 Récapitulatif

Dans ce qui suit, nous allons récapituler les caractéristiques principales de chaque théorie : classique, évolutionnaire et computationnelle pour mieux voir la différence et les domaines d'application de chacune d'entre elles. Ces critères sont résumés dans le tableau suivant :

Théorie des jeux classique	*Théorie des jeux évolutionnaire*	*Théorie des jeux computationnelle*
Objectifs		
Résoudre un conflit	Étude des dynamiques de l'évolution	Analyse des comportements
Hypothèses principales		
– Comportement très rationnel pour chaque individu. – Théorie statique.	– Rationalité faible. – Population infinie. – Théorie dynamique.	– Horizon infini avec une approche mathématique. – Population finie.
Notions de base		
– Équilibre et en particulier l'équilibre de Nash.	– Stratégie évolutionnairement stable. – État stable d'une population.	– Méthode d'exploration. – Méthode d'évaluation. – Robustesse d'une stratégie.
Caractéristiques		
Jeux à un seul coup : – Chaque joueur souhaite choisir une stratégie qui n'est pas prévisible par son adversaire ⇒ utilisation des stratégies mixtes.	– Combat par paire d'individus. – Utilisation des stratégies mixtes.	– Méthode complètement automatisable. – Théorie exploratoire. – Un individu est indivisible ⇒ faire un arrondi à l'entier inférieur. – Outil d'étude et de validation des comportements.

– Se baser sur la notion de *conjecture*. – La solution proposée est dans la plupart des cas sous-optimale. Jeux répétés : – Utilisation d'un facteur d'escompte (*ombre du futur*). – Évaluation des flux de revenu en terme de paiement moyen à *long terme*. – Limités aux stratégies représentées par des automates finis ⇒ limiter le choix des joueurs. – La forme stratégique obtenue admet plusieurs équilibres de Nash en stratégies pures. – Tout équilibre de Nash dans un jeu répété une infinité de fois attribue à chaque joueur au moins sa valeur minimax du jeu à un seul coup.		Évolution écologique : – Description précise des calculs. – Aspect discret : fini et calcul entier exact. – Valable pour tout type de jeux et de comportements.
Problèmes		
– Il existe des jeux sans équilibre de Nash. – Il existe des jeux avec plusieurs équilibres de Nash. – Un équilibre de Nash conduit vers une solution sous-optimale. – Dans la vie réelle les individus ne sont pas souvent rationnels.	– Approche complètement théorique. – Non automatisable. – Simplification du monde réel. – Les combats ne se font pas toujours par paire.	– L'arrondi à l'entier inférieur peut influencer sur le mouvement d'évolution dynamique de la population.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons comparé les trois approches de la théorie des jeux : classique, évolutionnaire et computationnelle. Nous avons insisté sur leurs notions de base, leurs particularités ainsi que leurs domaines d'application.

Tout au long de cette étude nous avons constaté que ces théories ont été le fruit d'un travail assez sérieux de plusieurs scientifiques et théoriciens. Pour cela, nous ne pouvons pas dire qu'une théorie est meilleure qu'une autre. Chacune a ses particularités et elles sont complémentaires les unes par rapport aux autres.

Conclusion et perspectives

Il est temps maintenant de récapituler les apports originaux de notre travail qui s'inscrit dans le cadre de la théorie des jeux et s'intéresse à l'étude des comportements des agents notamment dans des situations de conflit.

Nous avons tout d'abord introduit la théorie des jeux classique qui définit la racine de la théorie des jeux et qui a été utilisée en premier par les économistes. Nous avons précisé ses concepts de base et ses caractéristiques principales pour mieux comprendre le raisonnement apporté par cette théorie.

Nous avons ensuite décrit la théorie des jeux évolutionnaire qui cherche à étudier la dynamique d'évolution des populations. Cette théorie a été utilisée principalement en biologie théorique pour décrire le comportement animal dans des environnements homogènes.

Par la suite, nous avons consacré notre étude à la théorie des jeux computationnelle. Cette dernière fournit des outils de simulation efficaces qui permettent d'analyser et d'étudier le comportement des agents dans des situations de conflit. Plusieurs expériences dans ce domaine ont été analysées. Ces expériences ont permis de déduire les caractéristiques principales des différentes stratégies et, dans certains cas, de déduire des *bonnes* stratégies.

Pour mieux clarifier nos idées, nous avons étudié les différences principales entre les trois approches de la théorie des jeux : classique, évolutionnaire et computationnelle. Cette étude nous a permis de comprendre les notions de base pour chaque théorie, leur but principal et leurs domaines d'application.

Nous pouvons conclure que la théorie des jeux n'est intéressante que si nous la pratiquons convenablement. Elle a pour but de découvrir comment des individus rationnels devraient interagir lorsqu'ils ont des intérêts conflictuels. Jusqu'à présent, cette théorie n'a fourni de réponse qu'à des situations simples. Mais ces réponses ont néanmoins permis une restructuration fondamentale de notre conception théorique du monde.

Jean Orizet[1] a dit :

> « *Un poème n'est jamais terminé, il est abandonné.* »

Il en va de même pour ce travail car il reste beaucoup de chemin à explorer. Notre étude peut être continuée dans plusieurs directions. Nous proposons en premier l'introduction des jeux à n joueurs où plusieurs joueurs interagissent en même temps. Ce type d'interaction permet d'étudier plusieurs situations possibles dans la vie réelle, nous citons par exemple le cas de plusieurs entreprises qui se battent pour avoir un meilleur gain.

Pour pouvoir étudier le plus de comportements possibles, nous souhaitons introduire de nouvelles notions telles que la coalition entre certains agents. Nous parlons dans ce cas des jeux *semi-coopératifs*. Ces situations sont souvent rencontrées dans la vie réelle

[1] Jean Orizet est l'un des plus grands artisans, dans le sens noble du terme, de la littérature française

comme par exemple le cas des entreprises qui coopèrent pour concurrencer d'autres ou dans plusieurs jeux célèbres tel que le jeu de la belote.

Un autre notion importante que nous souhaitons prendre en considération consiste à introduire l'*apprentissage* dans le comportement des joueurs. Dans ce cas, nous considérons que les joueurs peuvent apprendre les comportements de leurs adversaires au cours du temps. Ce comportement permet aux individus de connaître leurs adversaires et donc de mieux adapter leur comportement.

Nous parlons aussi de la notion d'*inférence comportementale* qui cherche à trouver la stratégie la plus fine possible au sens de Kolmogorov[2] permettant d'expliquer le comportement observé et de décrire l'ensemble des coups joués dans un jeu itératif.

Nous avons constaté que le but principal des différentes approches de la théorie des jeux consiste à chercher une *bonne* stratégie. Un proverbe africain dit :

« *Nul ne peut gagner le combat contre le sable* ».

En se basant sur ce proverbe, nous espérons comprendre le secret du *sable*, déduire ses caractéristiques et analyser ses particularités. Si nous arrivons à le faire il devient très facile de trouver une stratégie imbattable.

[2]Kolmogorov a défini une théorie de complexité : la complexité définie au sens de Kolmogorov pour un problème donnée mesure la taille du programme minimal permettant d'exprimer son comportement

Annexe A

Stratégies mixtes dans un jeu à horizon infini

Dans le chapitre 1 nous avons présenté les deux méthodes d'analyse des jeux présentées par Varian et Binmore dans [Var95, Bin99]. Par convention, nous allons appeler la première méthode la *méthode de Varian* et la deuxième *la méthode de Binmore*. Nous avons essayé d'appliquer la méthode de Varian, qui permet de calculer l'équilibre en stratégies mixte, sur des matrices de gains des jeux répétés indéfiniment dont les valeurs sont obtenues en appliquant la méthode de Binmore. Pour ce faire, nous nous sommes ramenés à étudier quelques exemples, en nous limitant aux stratégies pures qui peuvent être représentées par des automates finis.

Cas d'une matrice de gain avec plusieurs équilibres de Nash

Soient les deux stratégies représentées par les automates finis de la figure A.1. La matrice des gains est donnée par le tableau A.1.

		j	
		A	B
i	A	$(1,1)$	**(1,5)**
	B	**(5,1)**	**(1,1)**

TAB. A.1 – *Forme stratégique correspondante aux automates de la figure A.1.*

Dans cette matrice il existe 3 équilibres de Nash différents (notés en **gras**). Dans ce cas, et pour aider chacun des joueurs à choisir la stratégie à jouer, nous faisons appel à la méthode de Varian pour affecter à chacune des deux stratégies une valeur de probabilité.

Puisque chaque joueur est rationnel, le problème du joueur i consiste à maximiser son espérance de gain en fonction de ce qu'il pense que son adversaire va faire. Soient p_1 et p_2 les probabilités que le joueur i joue A et B respectivement. D'une manière similaire, on définit p'_1 et p'_2 comme étant les probabilités que le joueur j jouera A et B. Dans ce

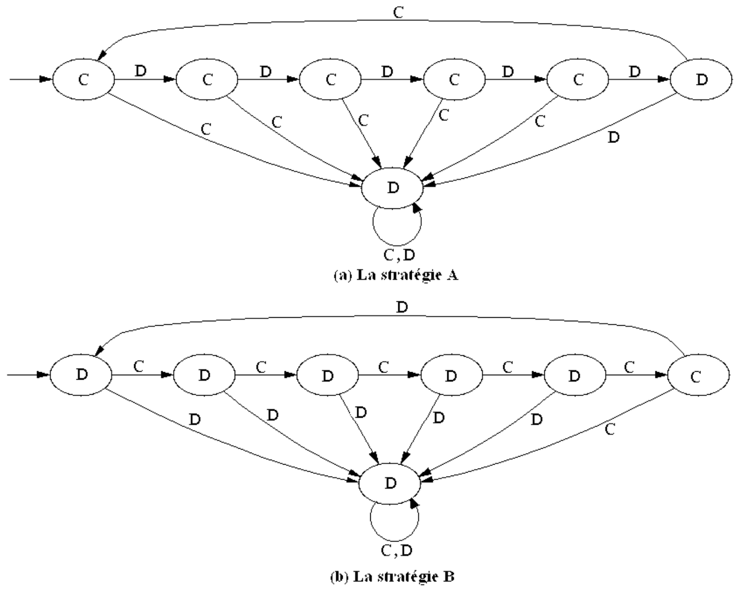


FIG. A.1 – *Deux stratégies représentées par leur automate fini.*

contexte, le problème du joueur i sera formulé ainsi :

$$\max_{p_1,p_2}\{p_1(p'_1+p'_2)+p_2(5p'_1+p'_2)\}$$

$$\textit{tels que}:\quad p'_1+p'_2=1,\qquad 0\le p'_i\le 1,\quad i=1,2.$$

L'application du théorème de Lagrange donne :

$$\left\{\begin{array}{l} p'_1+p'_2=\lambda\\ 5p'_1+p'_2=\lambda\\ p'_1+p'_2=1\\ 0\le p'_i\le 1,\quad i=1,2.\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} p'_1+p'_2=5p'_1+p'_2\\ p'_1+p'_2=1\\ 0\le p'_i\le 1,\quad i=1,2.\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} p'_1=0\\ p'_2=1\end{array}\right.$$

Puisque le jeu est symétrique, $p'_1 = p_1$ et $p'_2 = p_2$ ce qui apportera un gain de 1 pour chacun des joueurs en jouant la stratégie B.

Cet exemple montre que la méthode de Varian permet de savoir quel est l'équilibre de Nash qui sera atteint dans le cas où il y a plusieurs équilibres.

Cas d'une matrice de gain avec un seul équilibre de Nash

Soient les deux stratégies A et B décrites par les automates finis de la figure 1.4 (page 27). La matrice des gains, si les deux joueurs sont restreints par l'utilisation de ces deux stratégies, est donnée par le tableau A.2.

Cette matrice contient un seul équilibre de Nash en stratégies pures qui consiste à jouer la stratégie A pour les deux joueurs. Dans ce cas, nous n'avons pas besoin d'appliquer la méthode de Varian puisque chaque joueur va certainement choisir de jouer la stratégie qui lui permet d'atteindre cet équilibre.

		j	
		B	A
i	B	$(3,3)$	$(0,5)$
	A	$(5,0)$	**(1,1)**

TAB. A.2 – *Forme stratégique relative aux automates A et B de la figure 1.4.*

La méthode de Varian n'est pas applicable dans le cas d'une matrice de gains avec un seul équilibre de Nash. Supposons que le joueur i cherche à maximiser ses gains en appliquant cette méthode, ce qui revient à :

$$\max_{p_1,p_2}\{p_1(3p'_1 + 0p'_2) + p_2(5p'_1 + p'_2)\}$$

$$\textit{tels que} : \quad p'_1 + p'_2 = 1, \qquad 0 \leq p'_i \leq 1, \quad i = 1,2.$$

La résolution de ce système donne :

$$\begin{cases} 3p'_1 = \lambda \\ 5p'_1 + p'_2 = \lambda \\ p'_1 + p'_2 = 0 \\ 0 \leq p'_i \leq 1, \quad i = 1,2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2p'_1 + p'_2 = 0 \\ p'_1 + p'_2 = 0 \\ 0 \leq p'_i \leq 1, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p'_1 = -1 \\ p'_2 = 2 \\ 0 \leq p'_i \leq 1, \quad i = 1,2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Pas de solution!}$$

Ce résultat montre l'impossibilité de l'application de la méthode de Varian dans le cas d'une matrice avec un seul équilibre de Nash.

Cas d'une matrice de gains avec un équilibre de Nash dominant

Dans cet exemple, on essaie de montrer que la méthode de Varian pour trouver une stratégie mixte ne s'applique pas lorsqu'il y a un équilibre de Nash qui domine les autres.

Supposons que les seules stratégies pures disponibles sont : A, B, C et D. La forme stratégique obtenue selon la méthode de Binmore pour calculer les gains à long terme est représentée par le tableau A.3.

Dans cette matrice il existe 5 équilibres de Nash différents, ce qui ne rend pas évident, pour un joueur, de choisir la stratégie à jouer parmi l'ensemble des stratégies disponibles. Dans ce contexte, on fait appel à la méthode de Varian qui permet à chaque joueur de calculer la probabilité p_a, $0 \leq p_a \leq 1$, de jouer la stratégie a.

Soient (p_1, p_2, p_3, p_4) les probabilités que le joueur i affecte au fait de jouer B, A, D et C, et on définit (p'_1, p'_2, p'_3, p'_4) d'une manière similaire. Le problème pour le joueur i

		j			
		A	B	C	D
	A	**(1,1)**	(5,0)	(1,1)	(1,1)
i	B	(0,5)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
	C	(1,1)	(3,3)	**(3,3)**	**(3,3)**
	D	(1,1)	(3,3)	**(3,3)**	**(3,3)**

TAB. A.3 – *Forme stratégique relative aux automates A, B, C et D de la figure 1.4.*

consiste alors à :

$$\max_{(p_1,p_2,p_3,p_4)} \{p_1[3p'_1 + 0p'_2 + 3p'_3 + 3p'_4] + p_2[5p'_1 + 1p'_2 + 1p'_3 + 1p'_4] \\ +p_3[3p'_1 + 1p'_2 + 3p'_3 + 3p'_4] + p_4[3p'_1 + 1p'_2 + 3p'_3 + 3p'_4]\} \,.$$

L'application du théorème de Lagrange donne :

$$\begin{cases} 3p'_1 + 3p'_3 + 3p'_4 = \lambda \\ 5p'_1 + 1p'_2 + 1p'_3 + 1p'_4 = \lambda \\ 3p'_1 + 1p'_2 + 3p'_3 + 3p'_4 = \lambda \end{cases}$$

Sachant que :

$$p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4 = 1$$
$$0 \le p'_i \le 1 \qquad i \in [1,4].$$

Une simplification du système permet d'aboutir à l'ensemble d'équations :

$$\begin{cases} 2p'_1 + p'_2 - 2p'_3 - 2p'_4 = 0 \\ 2p'_1 - 2p'_3 - 2p'_4 = 0 \\ p'_2 = 0 \\ p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4 = 0 \\ 0 \le p'_i \le 1 \qquad i \in [1,4] \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$p'_1 = 0,5, \quad p'_2 = 0, \quad p'_3 = 0,25, \quad p'_4 = 0,25.$$

Ce qui permet de déduire une stratégie mixte, que l'on appellera par la suite *PROBA* et qui joue avec une probabilité de $\frac{2}{4}$ la stratégie B, 0 la stratégie A, $\frac{1}{4}$ D et $\frac{1}{4}$ C. Le résultat d'une évolution écologique entre ces 4 stratégies est donné par la figure A.2. Ce résultat montre que la stratégie *PROBA* n'obtient pas un meilleur score.

Remarque 1. *Dans l'évolution écologique, on considère que chaque joueur calcule la probabilité de jouer une stratégie à chaque rencontre avec un nouveau individu. Dans ce contexte, la stratégie choisie sera jouée tout au long de sa rencontre avec cet individu.*

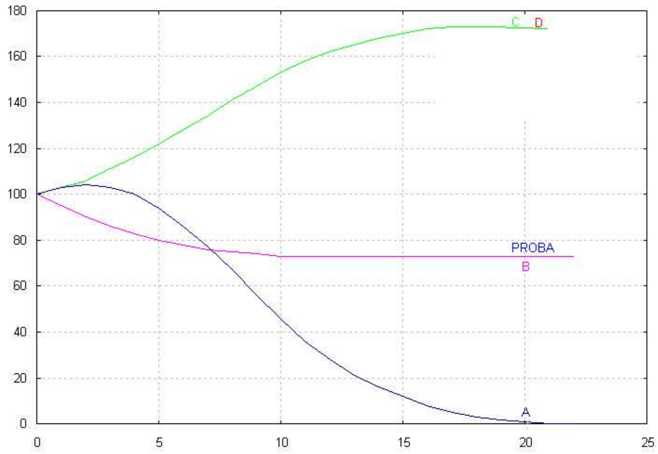


FIG. A.2 – *Résultat de l'évolution écologique.*

Si nous analysons la matrice des gains, nous remarquons que les deux stratégies C et D donnent le même résultat. Les deux équilibres de Nash (D, C) et (C, D) représentent le même équilibre. Dans ce cas, la forme stratégique du jeu sera réduite à celle représentée par le tableau A.4. $D\backslash C$ indique la stratégie D ou la stratégie C. L'application de la

		j: B	A	$D\backslash C$
i	B	(3,3)	(0,5)	(3,3)
	A	(5,0)	**(1,1)**	(1,1)
	$D\backslash C$	(3,3)	(1,1)	**(3,3)**

TAB. A.4 – *Forme stratégique réduite relative aux automates A, B, C et D de la figure 1.4.*

méthode de Varian pour cette matrice donne une stratégie mixte qu'on appellera *PROBA* et qui permet de jouer avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ la stratégie B, 0 la stratégie A et $\frac{1}{2}$ C ou D. Le résultat obtenu dans une évolution écologique est représenté par la figure A.3. Ce résultat montre que la stratégie mixte *PROBA* ne donne pas un meilleur résultat et que les stratégies gagnantes sont C et D. Cependant, dans la forme stratégique du jeu, nous remarquons qu'il y a deux équilibre de Nash (A, A) et ($D\backslash C$, $D\backslash C$) qui rapportent respectivement pour chacun des deux joueurs un gain de $(1, 1)$ et $(3, 3)$. Dans ce contexte, il est clair que chaque joueur préférera gagner 3 que gagner 1, sachant que cette valeur indique le gain moyen à *long terme*. Dans ce cas chacun d'entre eux choisira de jouer la stratégie C ou D. Dans cette forme stratégique l'équilibre de Nash ($D\backslash C$, $D\backslash C$) sera considéré comme un équilibre dominant qui sera certainement choisi par les deux joueurs. Cet exemple montre que la méthode de Varian ne peut pas être utilisée lorsque la forme stratégique du jeu contient un équilibre de Nash qui domine les autres.

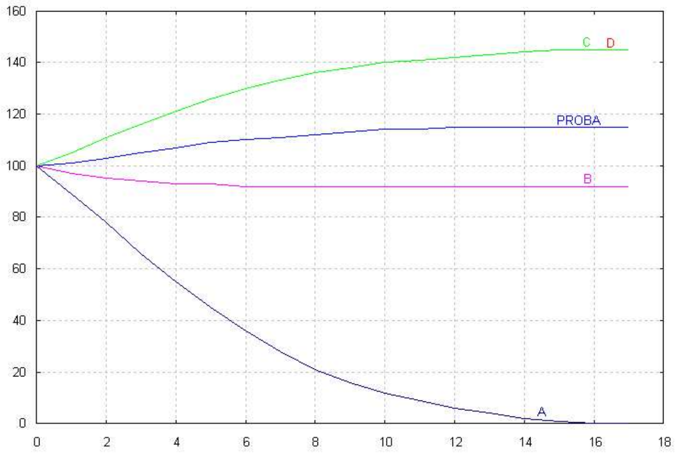


FIG. A.3 – *Résultat de l'évolution écologique.*

Cas d'une matrice de gains avec plusieurs équilibres de Nash dominants

La famille des stratégies impliquées dans ce jeu sont B, A, E et D dont les automates finis sont représentés par la figure 1.4. La forme stratégique de ce jeu est donnée par le tableau A.5 qui contient 3 équilibres de Nash différents.

i \ j	B	A	E	D
B	(3,3)	(0,5)	(0,5)	(3,3)
A	(5,0)	**(1,1)**	$(\frac{7}{3},\frac{2}{3})$	(1,1)
E	(5,0)	$(\frac{2}{3},\frac{7}{3})$	**(3,3)**	$(\frac{7}{4},\frac{7}{4})$
D	(3,3)	(1,1)	$(\frac{7}{4},\frac{7}{4})$	**(3,3)**

TAB. A.5 – *Forme stratégique relative aux automates A, B, D et E de la figure 1.4.*

Soient (p_1, p_2, p_3, p_4) les valeurs de probabilité que le joueur i affectera pour jouer B, A, E et D. On définit de manière similaire (p'_1, p'_2, p'_3, p'_4) pour le joueur j. L'application de la méthode de Varian pour cet exemple donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2p'_1 + p'_2 + \frac{7}{3}p'_3 - 2p'_4 = 0 \\ 2p'_1 + \frac{2}{3}p'_2 + 3p'_3 - \frac{5}{4}p'_4 = 0 \\ p'_2 + \frac{7}{4}p'_3 = 0 \\ \frac{1}{3}p'_2 - \frac{2}{3}p'_3 - \frac{3}{4}p'_4 = 0 \\ 2p'_1 + \frac{7}{12}p'_3 - 2p'_4 = 0 \\ 2p'_1 - \frac{1}{3}p'_2 + \frac{5}{4}p'_3 - \frac{5}{4}p'_4 = 0 \\ 0 \leq p'_i \leq 1, \quad i = 1,2,3,4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p'_1 = 0,4476 \\ p'_2 = 0,4000 \\ p'_3 = -0,2286 \\ p'_4 = 0,3810 \end{cases} \Rightarrow \textbf{Pas de solution!}$$

Puisque la matrice de jeu étudiée donne le score moyen obtenu à long terme, chaque joueur cherche à choisir un équilibre qui maximise ses gains. Dans cette matrice les deux équilibres de Nash (E, E) et (D, D) emportent le même gain pour les deux joueurs et dominent strictement l'équilibre (A, A). Dans cette situation, chaque joueur choisit de jouer E ou D.

Cas d'une matrice de gains avec une stratégie strictement dominante pour les deux joueurs

Soit le jeu représenté par la forme stratégique du tableau A.6. Cette matrice contient

		j			
		A	B	C	D
	A	(2,2)	$(\mathbf{\frac{5}{2},\frac{5}{2}})$	$(\frac{17}{6},2)$	$(\mathbf{\frac{5}{3},\frac{5}{2}})$
i	B	$(\mathbf{\frac{5}{2},\frac{5}{2}})$	(2,2)	$(\frac{17}{6},2)$	$(\mathbf{\frac{5}{3},\frac{5}{2}})$
	C	$(2,\frac{17}{6})$	$(2,\frac{17}{6})$	$(\frac{7}{3},\frac{7}{3})$	$(\mathbf{\frac{5}{3},\frac{10}{3}})$
	D	$(\mathbf{\frac{5}{2},\frac{5}{3}})$	$(\mathbf{\frac{5}{2},\frac{5}{3}})$	$(\mathbf{\frac{10}{3},\frac{5}{3}})$	$(\mathbf{\frac{5}{3},\frac{5}{3}})$

TAB. A.6 – *Forme stratégique avec quatre stratégies pures*

9 équilibres de Nash en stratégies pures. Cependant, On remarque que pour chacun des deux joueurs la stratégie D domine strictement les autres stratégies. Dans ce cas, D est la meilleure stratégie parmi celles impliquées dans cet exemple. L'application de la méthode de Varian pour ce jeu donne une probabilité de 1 de jouer D et de 0 pour les autres stratégies.

Remarque 2. *Cas d'une matrice de gain sans équilibre de Nash*

Soit le jeu représenté par la matrice de gain du tableau A.7.

Dans cette matrice il n'existe aucun équilibre de Nash ce qui rend très difficile pour chaque joueur de choisir la bonne stratégie à jouer. Dans une telle situation, l'utilisation des stratégies mixtes s'avère intéressante.

		j	
		A	B
i	A	(1,5)	(4,3)
	B	(3,2)	(2,4)

TAB. A.7 – *Forme stratégique avec deux stratégies pures*

Soient p_1, p_2 la probabilité que le joueur i joue A et B respectivement, nous définissons de manière similaire p'_1, p'_2 pour le joueur j. L'application de la méthode de Varian par le joueur i consiste à :

$$max_{p_1,p_2}\{p_1(p'_1 + 4p'_2) + p_2(3p'_1 + 2p'_2)\}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} p'_1 + 4p'_2 = \lambda \\ 3p'_1 + 2p'_2 = \lambda \\ p'_1 + p'_2 = 1 \\ 0 \leq p'_i \leq 1, \quad i = 1, 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p'_1 - 2p'_2 = 0 \\ p'_1 + p'_2 = 1 \\ 0 \leq p'_i \leq 1, \quad i = 1, 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p'_1 = \dfrac{1}{2} \\ p'_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, le problème pour le joueur j consiste à :

$$max_{p'_1,p'_2}\{p'_1(5p_1 + 2p_2) + p'_2(3p_1 + 4p_2)\}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} 5p_1 + 2p_2 = \lambda \\ 3p_1 + 4p_2 = \lambda \\ p_1 + p_2 = 1 \\ 0 \leq p_i \leq 1, \quad i = 1, 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p_1 - 2p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \\ 0 \leq p_i \leq 1, \quad i = 1, 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{2} \\ p_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Dans ce cas, la stratégie mixte jouée par chacun des deux joueurs consiste à jouer avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ la stratégie A et $\frac{1}{2}$ la stratégie B, ce qui apportera un gain de $\frac{5}{2}$ pour chacun des deux joueurs.

Annexe B

Expériences sur des versions différentes du simulateur

Nous avons présenté dans le chapitre 3 les outils de simulation du projet « *prison* ». Ces derniers prendnent comme hypothèse principale, pour le calcul de la dynamique d'évolution, une population finie et le fait que chaque individu soit indivisible.

Le calcul effectué dans ces simulateurs est présenté par l'équation 3.4 (page 53). Pour pouvoir vérifier la robustesse de ce calcul nous avons testé quelques changements sur la version originale. Dans ce contexte, nous avons utilisé d'autres versions dont le calcul est aussi effectué en utilisant l'équation 3.4. Dans ce cas, nous introduisons le calcul réel en considérant qu'un individu peut être divisible et que la population est représentée par des pourcentages. Il est aussi important de noter que la précision du calcul est limitée par la capacité de la machine et la représentation des flottants par le compilateur.

Les différentes versions du simulateurs peuvent être décrites comme suit :

- *prison* : c'est la version originale du simulateur basée sur un calcul entier avec un arrondi à l'entier inférieur.
- *prison1* : dans cette version nous introduisons le calcul réel.
- *prison2* : cette version utilise le même principe que *prison1*. La seule différence consiste à arrondir vers 0 si le nombre d'individus est $\ll 1$
- *prison3* : dans cette version nous considérons un pourcentage des populations à la place du nombre d'individus.
- *prison4* : même principe que *prison3* avec un arrondi vers 0 si le pourcentage d'une population est $\ll 1$.

Pour bien pouvoir étudié la différence entre ces différentes versions, nous allons présenter quelques exemples de simulation. La description complète des stratégies utilisées dans ces exemples peut être trouvée dans [Bea00].

Exemple 1.

Dans cet exemple, les paramètres utilisés sont ceux du dilemme classique ($T = 5$, $R = 3$, $P = 1$, $S = 0$). Chaque partie dure 1000 coups et au départ nous considérons que 200 individus utilisent la stratégie *all_c*, 255 utilisent *all_d*, 50 *tit-for-tat* et 100 *spiteful*.

Les résultats obtenus pour les différentes versions sont représentés dans les figures B.1 et B.2. Ces résultats montre que les stratégies ont le même comportement. Ce qui implique que le calcul utilisé dans « *prison* » et en particulier la technique d'arrondi ne change pas grand chose dans les résultats.

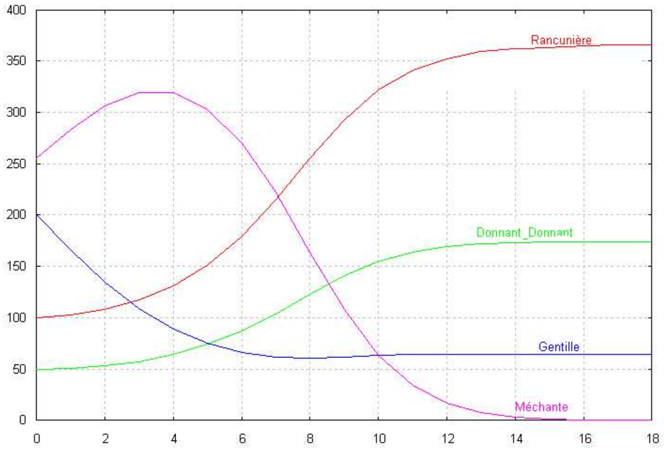


FIG. B.1 – *Graphe obtenu avec « prison » pour l'exemple 1.*

Exemple 2.

Pour mieux étudier la robustesse du calcul entier, nous avons introduit une autre stratégie aléatoire appelée *probability*. Le comportement de cette stratégie consiste à coopérer les deux premiers coups, par la suite, elle tire un nombre aléatoire compris entre 0 et 3. Soit k le nombre tiré, si son adversaire a trahi plus que k fois durant les 5 derniers coups, *probability* le puni en trahissant $k + 1$ fois. Pour cet exemple, nous considérons, qu'à la population initiale, 300 individus utilisent la stratégie *per_ccd*[1], 100 utilisent *soft_majo*[2], 245 utilisent *per_ddc*[3] et 100 utilisent *probability*.

Avec le simulateur « *prison* », la stratégie soft_majo gagne le combat. Cependant, nous remarquons qu'avec les autres versions du simulateurs, il est possibles que d'autres stratégies gagnent. Les résultats obtenus sont représentés par les figures B.3 et B.4.

Dans la vie réelle, une stratégie aléatoire n'a pas un sens significatif et nous ne pouvons pas préciser sa manière d'évoluer. De plus, dans plusieurs expériences, nous avons constaté qu'une stratégie aléatoire obtient, dans la plupart des cas, des scores différents face à elle même. Ce résultat ne permet pas de bien expliquer le comportement des stratégies lorsque l'évolution implique une ou plusieurs stratégies aléatoires.

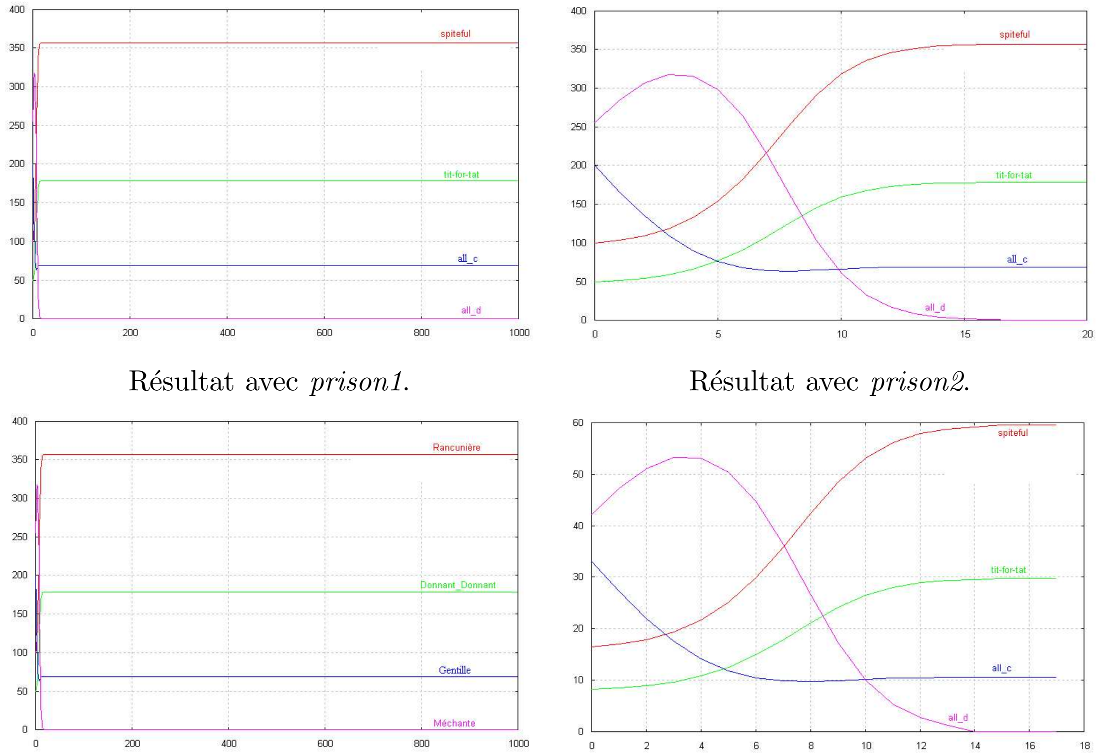
Exemple 3.

Pour mieux vérifier la robustesse du calcul, nous avons comparé la sensibilité, de la dynamique d'évolution, à la taille de la population pour chacune des versions du simulateur.

Les résultats obtenus avec « *prison* » ont montré que la dynamique d'évolution change en supprimant un seul individu dans la population. Cependant, en utilisant les autres versions, la suppression d'un individu ne change pas grand chose dans la dynamique d'évolution. Nous pouvons conclure que l'arrondi dans le calcul peut, dans certains cas très rare, influer sur les résultats.

Les résultats obtenus sont représentés dans les figures B.5 et B.6. Les paramètres utilisés sont ceux du dilemme classique, au départ, dans le premier cas, 300 individus

[1] Elle coopère deux fois de suite puis elle trahit et ainsi de suite
[2] Elle joue la carte que son adversaire a majoritairement joué dans l'histoire passé de la partie
[3] Elle trahit deux fois de suite puis elle coopère et ainsi de suite



Résultat avec *prison1*. Résultat avec *prison2*.

Résultat avec *prison3*. Résultat avec *prison4*.

FIG. B.2 – *Graphes obtenus avec les autres versions pour l'exemple 1.*

utilisent per_ccd, 100 utilisent soft_majo et 245 utilisent per_ddc. Dans le deuxième cas, nous diminuons la population par un seul individu jouant à la stratégie per_ddc.

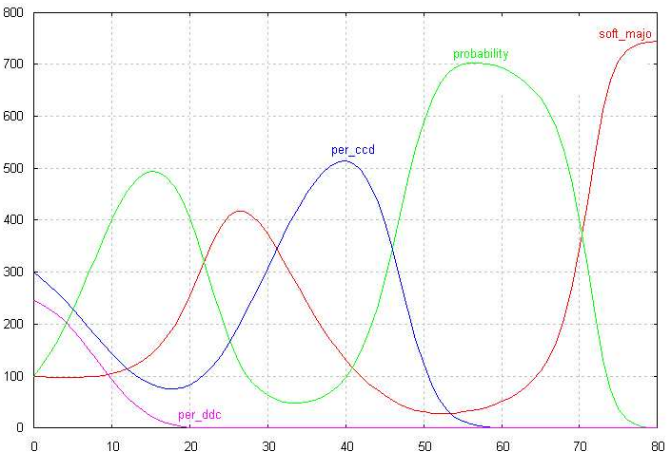
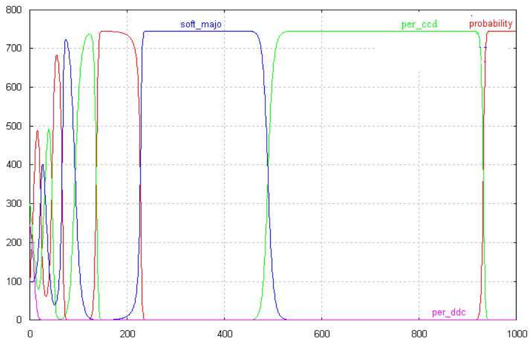
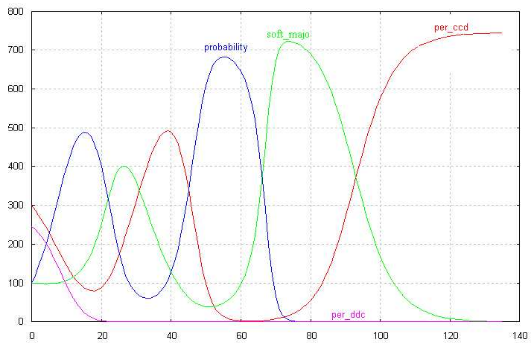


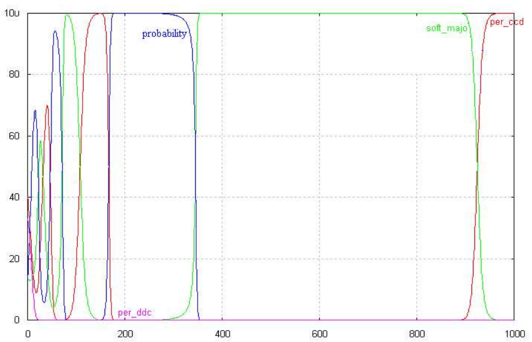
FIG. B.3 – *Graphe obtenu avec « prison* »pour l'exemple 2.



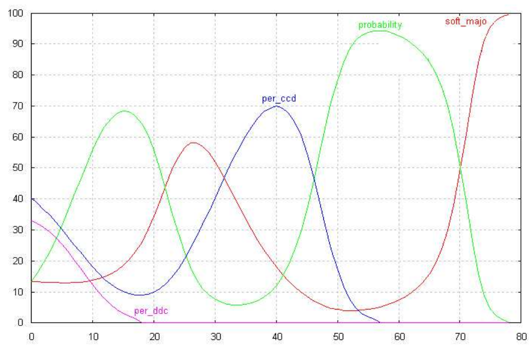
Résultat avec *prison1*.



Résultat avec *prison2*.



Résultat avec *prison3*.



Résultat avec *prison4*.

FIG. B.4 – *Graphes obtenus avec les autres versions pour l'exemple 2.*

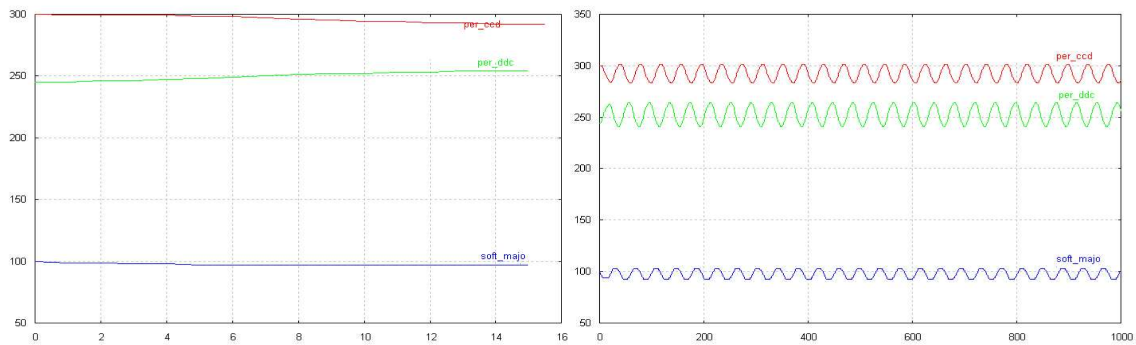
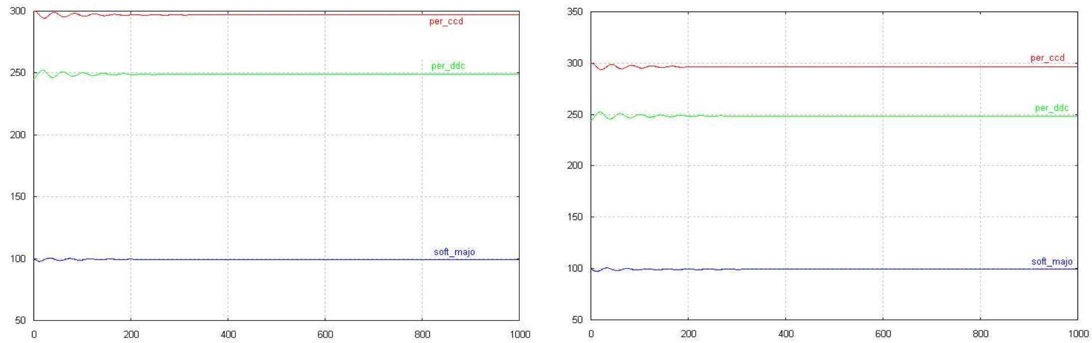
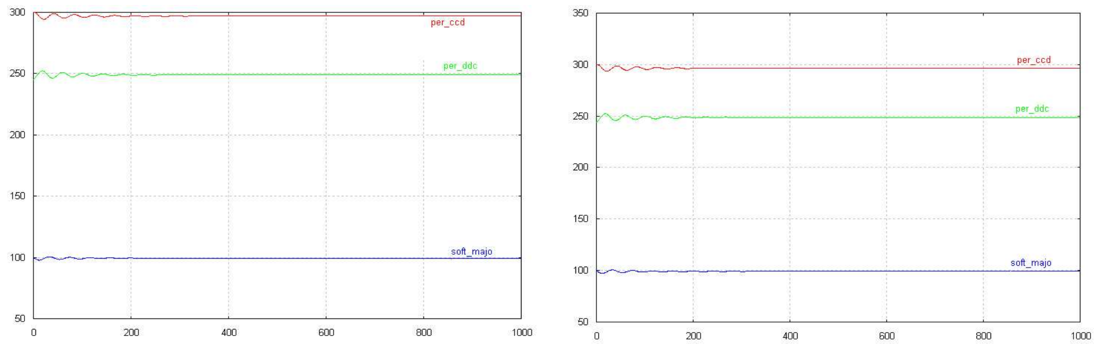


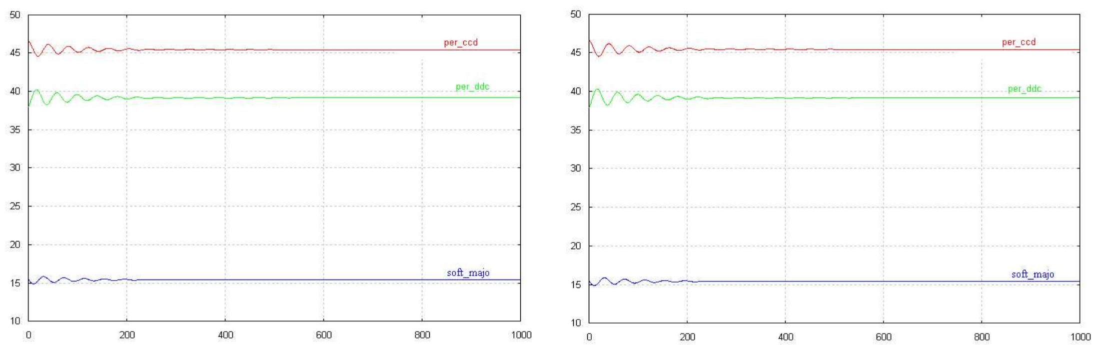
Fig. B.5 – *Résultat obtenu avec « prison » pour l'exemple 3.*



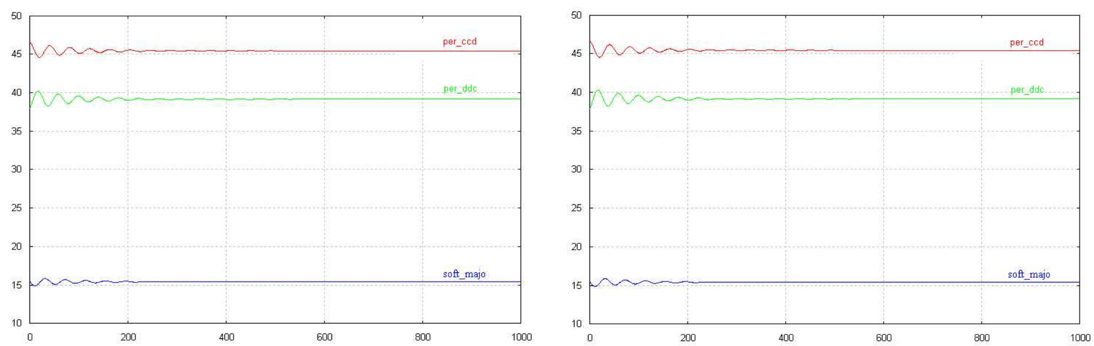
Résultats avec *prison1*.



Résultats avec *prison2*.



Résultats avec *prison3*.



Résultats avec *prison4*.

FIG. B.6 – *Graphes obtenus avec les autres versions pour l'exemple 3.*

Bibliographie

[Aum89] Robert J. Aumann. Game theory. In Murray Milgate John Eatwell and Peter Newman, editors, *The New Palgrave : Game Theory*. Macmillan Reference Books, 1989.

[Axe84] Robert Axelrod. *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, United State of America, 1984.

[BC78] D. T. Bishop and C. Cannings. A generalised war of attrition. *J. theor. Biol*, 70 :85–124, 1978.

[BDM96] Bruno Beaufils, Jean-Paul Delahaye, and Philippe Mathieu. Our meeting with gradual, a good strategy for the iterated prisoner's dilemma. In Christopher G. Langton and Katsunori Shimohara, editors, *Proceedings of Artificial Life V*, pages 202–09, Cambridge, MA, USA, 1996. The MIT Press/Bradford Books. Artificial Life V, Nara, Japan, May 16-18 1996.

[BDM01] Bruno Beaufils, Jean-Paul Delahaye, and Philippe Mathieu. Adaptive behaviour in the classical iterated prisoner's dilemma. In Daniel Kudenko and Eduardo Alonso, editors, *Proceedings of AISB'01 symposium on Adaptive Agents and Multi-agent systems*, pages 65–72. The Society for the Study of Artificial Intelligence and the Simulation of Behaviour, 2001.

[Bea00] Bruno Beaufils. *Modèles et simulations informatiques des problèmes de coopération entre agents*. PhD thesis, Université des sciences et thechnologies de Lille, Laboratoire d'Innformatique Fondamentale de Lille -Bât. M3- 59655 Villeneuve D'ascq Cedex, 2000.

[Ber98] Ulrich Berger. Best response adaptation for role games. *IIASA Interim Report IR-98-086.*, 1998.

[Ber01] Alain Berro. *Optimisation multiobjectif et stratégies d'évolution en environnement dynamique*. PhD thesis, Université des Sciences Sociales Toulouse I, 2001.

[Bin99] Ken Binmore. *Jeux et théorie des jeux*. De Boeck & Larcier, 1999.

[BL87] Robert Boyd and Jeffrey P. Lorberbaum. No pure strategy is evolutionarily stable in the repeated prisoner's dilemma game. *Nature*, 327 :58–59, 1987.

[Chr98] Labiouse Christophe. L'évolution de la coopération : Modélisation par le dilemme du prisonnier itératif. *Publication Interne L446, Université de Liege, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education*, 1998.

[DD95] R. W. Dimand and M. A. Dimand. Von neumann and morgenstern in historical perspective. *Théory des jeux et analyse économique 50 ans après*, 4 :539–57, 1995.

[Del00] François Delabre. Evaluation de comportements adaptatifs entre agents dans des méta-jeux. Mémoire de dea, Université des Sciences et Technologie de Lille, 2000.

[DM96] Jean-Paul Delahaye and Philippe Mathieu. Etude sur les dynamiques du dilemme itéré des prisonniers avec un petit nombre de stratégies : Y a-t-il du chaos dans le dilemme pur ? *Publication Interne IT-294*, 1996.

[Dry91] Dryden. Nash equilibrium. In Ken Binmore, editor, *Essays on the Foundations of Game Theory*, number ISBN 0-631-16866-4. Basil Blackwell, 1991.

[ES77] M. Eigen and P. Schuster. Emergence of the hypercycle. *Naturwissenschaften*, 64 :541–65, 1977.

[Esh81] I. Eshel. Evolutionary and continuous stability. *J. theor. Biol.*, 1981.

[ET99] Ivar Ekeland and Roger Témam. *Convex Analysis and Variational Problems*, volume 28. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

[Fis30] R. A. Fisher. *The Genetic Theory of Natural Selection.* Oxford, Clarendon Press, 1930.

[Flo52] Merrill M. Flood. *Some experimental games.* Research Memorandum RM-789-1. The RAND Corporation, Santa-Monica, CA, USA, 1952.

[Gir00] Gaël Giraud. *La théorie des jeux.* Flammarion, 2000.

[Gra79] A. Grafen. The hawk-dove game played between relatives. *Anim. Behav*, 27(905-7), 1979.

[Gue95] Bernard Guerrien. *La Théorie des Jeux.* Economica, 2 édition edition, 1995.

[Hob51] Thomas Hobbes. *Leviathan.* Collier Books edition, New York, 1951.

[HS98] Josef Hofbauer and Karl Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics.* Cambridge University Press, 1998.

[Joh99] Stefan J. Johansson. *Game Theory and Agents.* PhD thesis, Department of Software Engineering and Computer Science, University of Karlskrona/Ronneby, 1999.

[Kre92] David Kreps. *Théorie des jeux et modélisation économique.* Dunod, 1992.

[Lew61] R. C. Lewontin. Evolution and the theory of games. *J. Theor. Biol*, 1 :382–403, 1961.

[LR85] R. Duncan Luce and Howard Raïffa. *Game Decisions : Introduction and Critical survey.* Dover Publications, 2 edition, 1985.

[McK03] Alexander J. McKenzie. *Evolutionary Game Theory.* The Stanford Encyclopedia of Philosophy, edward n. zalta edition, 2003.

[Mer95] Olivier Du Merle. *Points intérieurs et plans coupants, mise en oeuvre et développement d'une méthode pour l'optimisation convexe et la programmation linéaire structurée de grande taille.* PhD thesis, Faculté des sciences Economiques et Sociales, l'Université de Genève, Département HEC, 1995.

[Nas50a] John F. Nash. The bargaining problem. *Econometrica*, 18 :155–62, 1950.

[Nas50b] John F. Nash. Equilibrium points in n-person games. *PNAS*, 36 :48–49, 1950.

[Nas51] John F. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics Journal*, 54 :286–95, 1951.

[O'R95] Colm O'Riordan. Iterated prisoner's dilemma : A review. Technical report, NUIG-IT-260601, 1995.

[Pou92] William Poundstone. *Prisoner's Dilemma*. Doubleday, 1992.

[PR98] Anne Petit-Robin. *Aborder la théorie des jeux*. Seuil, 1998.

[Ras94] Eric Rasmussen. *Jeux et informations*. Basil Blackwell, 1994.

[RC65] Anatol Rapoport and Albert M. Chammah. *Prisoner's dilemma : A Study in Conflict and Cooperation*. The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1965.

[Ril78] J. G. Riley. Evolutionary equilibrium strategies. *Dept of Economics, University of California, Los Angeles*, (Warking Paper No. 109), 1978.

[Roc72] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1972.

[RV88] C. Roos and J. P. Vial. Analytic centers in linear programming. Technical Report 88-68, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Technische Universiteit Delft, Holland, 1988.

[SC96] Tuomas W. Sandholm and Robert H. Crites. Multiagent reinforcement learning in the iterated prisoner's dilemma. *BioSystems*, 37(1,2) :147–66, 1996.

[Sch96] Andrew Schotter. *Microéconomie : une approche contemporaine*. Vuibert, 1996.

[Sch01] Christian Schmidt. *La théorie des jeux : Essai d'interprétation*. Puf, 2001.

[Shu91] Martin Shubik. *Théorie Des Jeux et Sciences Sociales*. Economica, 1991.

[Smi74] John Maynard Smith. The theory of games and the evolution of animal conflicts. *Journal of Theoretical Biology*, 47 :209–21, 1974.

[Smi82] John Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 1982.

[SP73] John Maynard Smith and George Price. The logic of animal conflict. *Nature*, 246 :15–18, 1973.

[Sug94] Robert Sugden. A theory of focal points. *Journal of Economic Literature*, (C72), 1994.

[SZ92] Larry Samuelson and J. Zhang. Evolutionary stability in asymmetric games. *J. Econ. Theory*, 57 :363–91, 1992.

[TJ78] P. D. Taylor and L. B. Jonker. Evolutionarily stable strategies and game dynamics. *Math. Biosc*, 40 :145–56, 1978.

[Var95] Hal R. Varian. *Analyse Microéconomique*. Balises De Boeck Université, 1995.

[vD89] Eric van Damme. Extensive form games. In Murray Milgate John Eatwell and Peter Newman, editors, *The New Palgrave : Game Theory*. Macmillan Reference Books, 1989.

[vD95] Eric van Damme. Game theory : The next stage. *Economics, the Next Ten Years*, 1995.

[vDW00] Eric van Damme and Jörgen W. Weibull. Evolution and refinement with endogenous mistake probabilities. *EEA conference*, 2000.

[vNM44] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.

[Wei95] Juergen W. Weibull. *Evolutionary Game Theory*. Cambridge, MA : The M.I.T. Press, 1995.

[Yao96] Xin Yao. Evolutionary stability in the n-person iterated prisoner's dilemma. *Biosystems*, 37(3) :189–97, 1996.

[Zee79] E. C. Zeeman. *Population dynamics from game theory.* Proc. Int. Conf. Global Theory of dynamical Systems, Northwestern : Evanston, 1979.

[Zee81] E. C. Zeeman. Dynamics of the evolution of animal conflicts. *J. theor. Biol*, 89 :249–70, 1981.