Polytech'Lille — GIS 3 — Structures de Données — Complexité de l'algorithme de Karatsuba

---

On cherche à résoudre l'équation de récurrence (de type « diviser pour régner ») avec condition initiale suivante :

$$\begin{array}{rcl} f(n) & = & 3\,f\left(\dfrac{n}{2}\right) + 4\,n - 3\,, \\ f(1) & = & 2\,. \end{array}$$

On suppose[1] $n = 2^k$ et on pose[2] $h(k) = f(n)$. On remarque que $k = \log_2(n)$. En particulier, $n = 1$ correspond à $k = 0$ et $n/2$ correspond à $k-1$. On est donc amené à résoudre l'équation de récurrence avec condition initiale suivante :

$$\begin{array}{rcl} h(k) & = & 3\,h(k-1) + 4 \times 2^k - 3\,, \\ h(0) & = & 2\,. \end{array}$$

Déroulons quelques lignes de l'équation de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} h(k) & = & 3\,h(k-1) + 4 \times 2^k - 3\,, \\ h(k-1) & = & 3\,h(k-2) + 4 \times 2^{k-1} - 3\,, \\ h(k-2) & = & 3\,h(k-3) + 4 \times 2^{k-2} - 3\,, \\ & \vdots & \\ h(1) & = & 3\,h(0) + 4 \times 2 - 3\,. \end{array}$$

Dans une suite d'égalités comme ci-dessus, la somme des membres gauches est égale à la somme des membres droits. Avant d'effectuer cette somme, on multiplie les deux membres de chaque égalité par une puissance de 3 de façon à faire apparaître les mêmes termes à gauche et à droite :

$$\begin{array}{rrcl} & h(k) & = & 3\,h(k-1) + 4 \times 2^k - 3\,, \\ (3\times\ ) & h(k-1) & = & 3\,h(k-2) + 4 \times 2^{k-1} - 3\,, \\ (3^2\times\ ) & h(k-2) & = & 3\,h(k-3) + 4 \times 2^{k-2} - 3\,, \\ & & \vdots & \\ (3^{k-1}\times\ ) & h(1) & = & 3\,h(0) + 4 \times 2 - 3\,. \end{array}$$

Les termes $3\,h(k-1), 3^2\,h(k-2), \ldots, 3^{k-1}\,h(1)$ apparaissent donc à la fois dans les membres gauches et droits. Au moment d'effectuer la somme, on peut les supprimer à gauche et à droite, tout en préservant l'égalité. On obtient :

$$h(k) \quad = \quad 3^k\,h(0) + 4\,\underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} 3^i\,2^{k-i}}_{2^k\,\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i} - \sum_{i=1}^{k} 3^i\,. \tag{1}$$

---

1. C'est une hypothèse.
2. C'est une notation (un changement de variable).

On se rappelle la formule pour la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=a}^{b} c^i \quad = \quad \frac{c^{b+1} - c^a}{c - 1}.$$

La formule (1) se réécrit alors en :

$$\begin{aligned} h(k) \quad &= \quad 3^k\, h(0) + 4 \times 2^k \times \left(\left(\frac{3}{2} \right)^k - 1 \right) - \frac{3^{k+1} - 3}{2}\,, && (2) \\ &= \quad 3^k\, h(0) + 8\, \left(3^k - 2^k \right) - \frac{3}{2}\, \left(3^k - 1 \right)\,. && (3) \end{aligned}$$

On se rappelle maintenant la formule suivante :

$$a^b \quad = \quad e^{b\, \ln(a)}\,.$$

Par conséquent,

$$3^k \quad = \quad e^{\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\, \ln(3)} \quad = \quad e^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\, \ln(n)} \quad = \quad n^{\log_2(3)}\,.$$

La formule (3) se réécrit donc en :

$$\begin{aligned} h(k) \quad &= \quad 2\, n^{\log_2(3)} + 8\, \left(n^{\log_2(3)} - n \right) - \frac{3}{2}\, \left(n^{\log_2(3)} - 1 \right)\,, \\ &= \quad \frac{17}{2}\, n^{\log_2(3)} - 8\, n + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Question 1. À titre d'exercice, vous pouvez résoudre [3] la relation de récurrence avec condition initiale suivante. Elle est plus simple et correspond à l'algorithme du tri-fusion :

$$\begin{aligned} f(n) \quad &= \quad 2\, f\left(\frac{n}{2} \right) + n\,, \\ f(1) \quad &= \quad 0\,. \end{aligned}$$

3. La solution est $f(n) = n\, \log_2(n)$.